INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Birigui

Licenciatura em Matemática

Miriam Alves Pereira

Números Complexos: História, Conceitos e Aplicações

Birigui - SP

2015

Miriam Alves Pereira

Números Complexos: História, Conceitos e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Birigui, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Mestre Deidimar Alves Brissi

Birigui - SP

2015

Pereira, Miriam Alves.

Números complexos: História, Conceitos e Aplicações/
Miriam Alves Pereira. – Birigui, 2015.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo,
Câmpus Birigui.

Orientador: Prof. Mestre Deidimar Alves Brissi.

1. Números Complexos. 2.História dos Números Complexos. 3.Aplicações dos Números Complexos. 4.Álgebra dos Números Complexos. 5.História da Matemática. I. Brissi, A. Deidimar. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Birigui. III.Título.

Miriam Alves Pereira

Números Complexos: História, Conceitos e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Birigui, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Comissão examinadora

____

Prof. Me. Deidimar Alves Brissi, IFSP. - Birigui

____

Profa. Ma. Manuella Aparecida Felix de Lima, IFSP. – Birigui

____

Prof. Dr. Régis Leandro Braguim Stábile, IFSP. – Birigui

Birigui, 15 de dezembro de 2015.

Dedico este trabalho à minha amada mãe, Maria Emilia (in memorian), de quem tenho eternas saudades e aos meus filhos, Pedro Lucas e Julia Beatriz.

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me ajudado e me guiado diante de tantas dificuldades; por ter me dado serenidade e sabedoria; por ter me feito entender que o curso de Licenciatura em Matemática é também uma oportunidade de mostrar o tamanho do Seu poder e pela oportunidade de ter convivido com pessoas que, apesar de terem idade para serem meus filhos e/ou irmãos, me ensinaram muito.

Aos professores; Profa. Ma. Manuella Aparecida Felix de Lima e Prof. Dr. Régis Leandro Braguim Stábile, que me apoiaram e me incentivaram, sempre com respeito e dedicação.

Ao meu orientador, Prof. Me. Deidimar Alves Brissi, pela orientação habilmente conduzida, pelo incentivo, pelo direcionamento e por acreditar no meu trabalho e também pela orientação na minha iniciação científica e aprendizado de outras matérias.

À banca examinadora, composta pelos docentes; Profa. Ma. Manuella Aparecida Felix de Lima e Prof. Dr. Régis Leandro Braguim Stábile, pela contribuição e compreensão até a consecução desse trabalho.

Aos meus colegas de estudos, pela ajuda e paciência; em especial, ao Alexandre, M.Cristina Cairolli Novaes, Thays Juliete C. da Silva, Bruno Grégio e ao Flávio Gregolin; pelo incentivo, conversas, risadas, viagens e trabalhos que fizemos juntos.

Aos meus colegas da turma Mat 111-N, pelos momentos de alegria e descontração e pelos momentos de angústias e provações.

Aos funcionários da administração e da biblioteca, em especial a Amanda Martins Moraes, pela colaboração.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um panorama geral da história dos números complexos, seus conceitos e aplicações. Sua história começa com Heron de Alexandria (10-70 d.C.), que tentou resolver problemas com raízes quadradas de números negativos, e vai até William Rowan Hamilton (1805–1865), sendo marcada por resistências, o que ilustra bem o quanto um conceito matemático pode demorar a ser compreendido e aceito, pois grandes matemáticos negaram sua existência mesmo quando os usavam para realizar operações. A análise do contexto histórico dos números complexos também mostra que o surgimento dos mesmos está associado, à resolução de equações algébricas de graus 3 e 4. A formalização deste conjunto numérico passou por diversos obstáculos que levaram em média 300 anos para serem vencidos, desenvolvendo, assim, teorias referentes à álgebra e aplicações. Esses números são considerados uma importante ferramenta para resolver diversos problemas, embora suas aplicações não ocorram de forma direta, mas sim aliadas a outras áreas do conhecimento, oferecendo ferramentas técnicas alternativas de demonstração e resolução de problemas, modelando problemas, criando conceitos e atribuindo significados. Os Números Complexos possuem diversas aplicações tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento, tais como, engenharia elétrica com a demonstração da aplicação em análise de circuitos AC, Física, aerodinâmica, geometria e nas artes. Existem áreas do conhecimento em que são considerados essenciais e outras em que são importantes facilitadores de cálculos. Este trabalho pode ser utilizado para auxiliar o professor do Ensino Médio para contextualizar este assunto, tornando o ensino mais agradável e aumentando o interesse do aluno.

Palavras-chave: 1. Números Complexos. 2. História dos Números Complexos. 3. Aplicações dos Números Complexos. 4. Álgebra dos Números Complexos. 5. História da Matemática.

ABSTRACT

This paper aims to present an overview of the History, concepts and applications of complex numbers. The story begins with Hero of Alexandria (10-70 AD), who tried to solve problems with square roots of negative numbers, and goes to William Rowan Hamilton (1805-1865), being marked by resistance, which illustrates how it may take a mathematical concept a long time to be understood and accepted because great mathematicians denied its existence, even when using it to perform operations. The analysis of the historical context of complex numbers also shows that the appearance is associated to solving algebraic equations of degrees 3 and 4. The formalization of this set of numbers went through several obstacles which took an average of 300 years to be overcome by developing theories regarding algebra and applications. These figures are considered an important tool to solve many problems, although their applications do not occur directly, but combined with other areas of knowledge, providing technical tools alternatives demonstration and problem solving, modeling problems, creating concepts and attributing meanings. The Complex Numbers have many applications both in Mathematics and in other areas of knowledge such as electrical engineering with the demonstration of the application in AC circuit analysis, Physics, aerodynamics, Geometry and the arts. There are areas of knowledge that are considered essential and others that are important facilitators for calculations. This work can be used to assist high school teachers to contextualize this issue, making school more enjoyable school and increasing student interest.

Keywords : 1. Complex Numbers. 2. History of Complex Numbers.3. Applications of Complex Numbers. 4. Algebra of Complex Numbers. 5. History of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A construção dos números complexos passou por diversos obstáculos, que levaram em média 300 anos para serem vencidos, desenvolvendo, assim, teorias referentes a esse conjunto numérico. São considerados uma importante ferramenta para resolver diversos problemas, embora suas aplicações não ocorram de forma direta, mas sim aliadas a outras disciplinas. No século XVI surgiram vestígios dos números complexos ao longo das descobertas de estudos para resoluções de equações algébricas de graus 3 e 4. Ainda no século XVI, o conjunto dos números complexos era pouco utilizado para facilitar os cálculos. No entanto, dada a incompreensão e o desconhecimento destes números, os matemáticos abandonaram o seu estudo.

A abordagem aprofundada aos números complexos começa a partir do século XVIII, na medida em que se descobre que os números complexos permitem conexão com o conjunto dos números reais. Já no século XIX, aparece a representação geométrica dos números complexos, motivada pela necessidade de se trabalhar com o conceito de vetores no plano, dentro da Geometria, Topologia, Física, entre outras áreas. A partir disso, os números complexos passaram a ser aplicados em várias áreas do conhecimento, dentro e fora da Matemática.

Novos números foram necessários quando do estudo do conjunto dos números Naturais ($\mathbb{N}$), na tentativa de se efetuar subtrações como $(2-4)$. Essa necessidade levou à criação do conjunto dos números dos Inteiros ($\mathbb{Z}$). O conjunto dos números inteiros, também mostrou-se insuficiente para efetuar divisões como $(7 \div 3)$, sendo construído, então, o conjunto dos números Racionais ($\mathbb{Q}$). Ainda com a impossibilidade de calcular a medida de certos segmentos como a diagonal de um quadrado, os matemáticos criaram o conjunto dos números Reais ($\mathbb{R}$).

Outra dificuldade encontrada foi perceber que não conseguiam efetuar algumas radiciações, pois, no conjunto dos reais, não existe raiz quadrada de números negativos. Para que isso fosse possível, os matemáticos ampliaram mais uma vez os conjuntos numéricos, criando um número imaginário, indicado por i, de modo a satisfazer: $i^2 = i.i = -1$.

Como consequência de todos esses estudos, surgiram os números Complexos ($\mathbb{C}$), números na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, sendo possível definir raiz quadrada de um número negativo. Potências de expoentes pares também podem ser negativas, como por exemplo:

$$(3i)^2 = 3^2 . i^2 = 9 . (-1) = -9.$$

Assim, $3i$ é raiz quadrada de -9. Além disso, $-3i$ também é raiz quadrada de -9.

1.1 Objetivo

Este trabalho tem por objetivo apresentar um panorama geral da história dos números complexos, seus conceitos e aplicações.

1.2 A organização deste trabalho

No Capítulo 2, vamos conhecer um pouco da história dos números complexos. Falaremos dos primeiros matemáticos que tentaram resolver problemas com raízes quadradas de números negativos, desde Heron de Alexandria (10-70 d.C.) (Figura 1) até William Rowan Hamilton (1805–1865) (Figura 2), expressando um pouco da vida de cada um, deles.

Figura 1 - Heron de Alexandria (10–70 d.C.)

Fonte: MUNDO EDUCAÇÃO, 2015

Ainda no Capítulo 2, falaremos do surgimento dos números complexos, abrangendo um resumo da sua evolução.

No Capítulo 3, apresentaremos o conjunto dos números complexos, suas operações, a representação geométrica e a forma trigonométrica, assim como, apresentaremos seu simétrico, seu conjugado e o seu inverso. Exemplos de como converter um número complexo da forma algébrica para a forma trigonométrica e vice-versa, também serão apresentados, além da multiplicação e da divisão de números complexos não-nulos na forma trigonométrica. A representação de números complexos na sua forma trigonométrica é também discutida neste capítulo, associando as etapas do conhecimento.

Aplicações em algumas áreas do conhecimento, serão apresentadas no Capítulo 4.

Figura 2 - Jean Rowan Hamilton (1805-1865)

Fonte: THEFAMOUSPEOPLE, 2015

2 A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O conjunto dos números complexos (Figura 3) é representado pelo símbolo $\mathbb{C}$, sendo i um número imaginário pertencente a esse conjunto, de modo que $i^2 = -1$ (NOÉ, 2014). O estudo dos números complexos levou os matemáticos ao cálculo das raízes de números negativos, pois com a utilização da identidade $i^2 = -1$, é possível extrair a raiz quadrada de números negativos, da seguinte forma:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1\,.\,16} = \sqrt{-1\,.\,4^2} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{4^2}\,.$$

Temos:

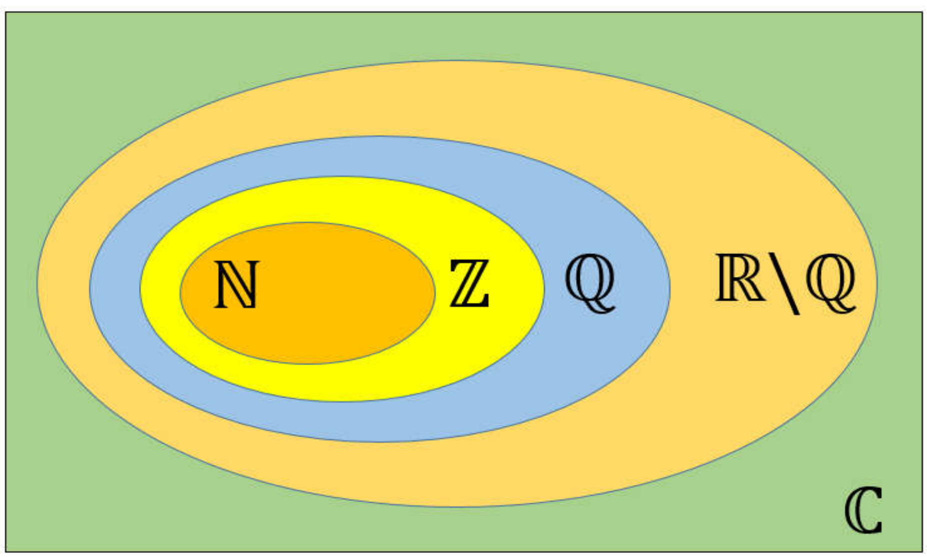
$$\sqrt{-1} = \pm i$$

$\sqrt{4^2} = 4$, ou seja,

$$\sqrt{-16} = \pm 4i\,.$$

Os números complexos constituem o maior conjunto numérico existente.

Figura 3 - Conjunto dos números complexos



Fonte: Elaborado pelo autor

O conjunto dos números complexos é o conjunto que possui maior cardinalidade. É necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos (IEZZI, 2010).

Com a necessidade da invenção de novos números na evolução da Matemática, o primeiro matemático de que se tem conhecimento de ter se deparado com um problema que envolvia números complexos foi Herón de Alexandria no século I d.C. (Figura1). Inventor, físico, matemático e autor de muitos livros. Talvez a mais antiga menção a uma raiz quadrada de um número negativo seja a expressão $\sqrt{81-144}$, no seu livro *Esteriometria*. Como não havia domínio sobre esses números, abandonou o seu cálculo.

Após algum tempo, por volta do ano 275 d.C., no livro *Arithmetica* de Diophanto (250 a 350 d.C., data aproximada) (Figura 4) aparece a descrição do seguinte problema: “Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados.” Não existem registros da solução do problema, que fica representado da seguinte forma:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0$$

Dividindo tudo por 4 temos: $6x^2 - 43x + 84 = 0$

Como concluiu que não havia solução real, não soube, a princípio, resolver a equação, visto que na resolução dessa equação nos deparamos com a raiz quadrada de -167 (BOYER, 2012):

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Figura 4 - Diofanto (250 a 350 d.C.)

Fonte: BIOGRAFIAS Y VIDAS, 2015

Segundo Eves (2011), por volta de 1515, Scipione Del Ferro (1465-1526) (Figura 5), professor de Matemática na Universidade de Bolonha, resolveu a equação cúbica $x^3 + mx = n$, baseando seu trabalho provavelmente em fontes árabes. Ele não publicou o resultado mas revelou o segredo a seu discípulo Antonio Fior.

Figura 5 - Scipione Del Ferro (1465-1526)

Fonte: COLÉGIO WEB, 2015

Por volta de 1530, outro grande matemático, Niccolo Fontana, (1500-1557) (Figura 6), apelidado por Tartaglia, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação da forma $x^3 + px^2 = n$. Fior, achando que se tratava de blefe, desafiou Tartaglia para uma disputa pública e não soube resolver o que fora proposto pelo seu oponente (EVES, 2004). Tartaglia, após vencer o desafio, ficou famoso e resolveu escrever em suas memórias: "Mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535" (TARTAGLIA, citado por, GARBI, 2010, p.37).

De acordo com Garbi (2010), a infância de Tartaglia, foi marcada pelo infortúnio, pelas lutas e por toda sorte de dificuldades. Aos onze anos, sua cidade foi tomada por tropas francesas e parte da população refugiou-se na igreja, inclusive mulheres e crianças. Impiedosamente, os franceses invadiram o local e foram matando quem encontrassem pela frente. Tartaglia foi ferido com golpes de sabre e abandonado entre os cadáveres. Sua mãe, mulher paupérrima e humilde, muito aflita, salvou-o lambendo-lhe as feridas, à falta de qualquer medicamento. Levou para o resto da vida uma profunda cicatriz na boca, o que provocou permanentemente defeito na fala, daí o apelido Tartaglia, que quer dizer gago. "Se minha barba não escondesse minhas cicatrizes, eu pareceria um monstro”, escrito anos depois, em um de seus livros (TARTAGLIA, citado por, GARBI, 2010, p.35).

Desde cedo demonstrou grande amor pelos estudos, mas, sem possibilidades financeiras, passou a estudar sozinho nos raros livros que conseguia obter. Sem condições para comprar papel, pena e tinta, escrevia com carvão sobre as lápides dos túmulos no cemitério, à noite. Em 1535, ganhava seu sustento como professor de ciência e publicou diversas obras com o seu cognome Tartaglia.

Segundo Eves (2011), credita-se a Tartaglia também o mérito de ter sido o primeiro a usar a matemática na ciência dos tiros de artilharia. Matemático muito talentoso, publicou edições de Euclides e Arquimedes.

Ainda no século XVI, os números complexos começaram a ser estudados com grande contribuição do matemático Girolamo Cardano (1501-1576) (Figura 7), que propôs o seguinte problema: “Dividir o número 10 em duas partes de modo que o seu produto seja 40”. Na tentativa de resolver o problema, Cardano utilizou a igualdade, isto é:

$$10 = x + y; \;\; x.y = 40 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{40}{x}, \qquad 10 = x + \frac{40}{x},$$

de onde segue que

$$10x = x^2 + 40$$

e, provou que $5 + \sqrt{-15}$ e $5\text{—}15$, são raízes da equação:

$$x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Porém, ele mesmo concluiu que esse problema era impossível e que essas expressões não tinham nenhum significado (IEZZI, 2005).

Figura 6 - Niccolo Fontana (1500-1557)

Fonte: BIOGRAFIASYVIDAS, 2015

Ainda, segundo Boyer (2012), após a notícia de triunfo de Tartaglia, o mesmo foi convidado por Cardano para ir a sua casa, insinuando que tratava de arranjar um encontro entre ele e um possível patrono, mas foi enganado. Tartaglia ganhou fama e apesar da intenção de manter segredo de seus métodos sobre o assunto, revelou-os para Cardano, pedindo segredo sobre a solução das cúbicas. Porém, em 1545, foi Cardano que apresentou em seu livro *Ars Magna* (Arte Maior), pela primeira vez a fórmula descoberta por Tartaglia na resolução de equações cúbicas, a qual faz referência a um novo tipo de número, que denominou “quantidade fictícia”, do tipo:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$

que representa a solução de uma equação do tipo:

$$x^3 + ax + b = 0, \text{ onde } \quad a > 0 \ e \ b > 0.$$

Essa fórmula só se aplicava quando $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \geq 0$, pois na época não se extraíam raízes quadradas de números negativos, hoje tratados como números imaginários.

É importante salientar que alguns matemáticos da época procuraram maneiras de evitar o uso de tais números. Entre eles, Cardano foi o que mais tentou evitar as "torturas mentais" envolvidas no uso de raízes quadradas de números negativos. No seu livro *De Regula Aliza*, de 1570, procurou artifícios que contornassem o uso de tais raízes na resolução de equações de grau 3, obtendo, somente, resultados vagos (RIPOLL; SILVEIRA , 2011).

De acordo com Garbi (2010), Cardano foi acusado de heresia por haver divulgado o horóscopo de Jesus Cristo, pois desprezava a religião. Era considerado na sua época: espião, traidor, solitário e invejoso. Filho ilegítimo de um advogado, constituiu uma família absolutamente desregrada. Seu filho mais velho foi condenado à morte por haver assassinado a esposa. De seu mais novo, num acesso de fúria, Cardano arrancou suas duas orelhas. Apesar destes traços nada dignificantes, seu nome também chegou até na expressão “eixo de Cardan”, utilizado nos automóveis. Tartaglia “explodiu” publicando sua versão dos fatos e denunciando Cardano por haver traído um sagrado juramento sobre a Bíblia. No final, a posteridade foi injusta com o sofrido Tartaglia; pois sua fórmula hoje é conhecida como Fórmula de Cardano.

Figura 7 - Girolamo Cardano (1501-1576)

Fonte: SCIENCEWORLD.WOLFRAM, 2015

Na mesma época, Raffaelle Bombelli (1526-1572) (Figura 8), matemático e engenheiro hidráulico, em grande parte autodidata, ao estudar as publicações de álgebra de sua época, teve o que chamou "ideia louca", pois toda questão "parecia apoiar-se em sofismas". Os dois radicandos das raízes cúbicas que resultam da fórmula usual, diferem apenas por um sinal. Vimos que a solução para a fórmula da equação $x^3 = 15x + 4$, leva a $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, ao passo que por substituição direta $x = 4$ é a única raiz positiva da equação. Com seu raciocínio, Bombelli mostrou o papel importante que os números imaginários conjugados iriam desempenhar no futuro (BOYER, 2012).

Por cálculo direto, ele verificou que 4 era uma raiz do polinômio, pois $4^3 - 15.4 = 4$. Em seguida, tentou verificar se encontrava esta raiz (4), aplicando a fórmula de Cardano (IEZZI, 2010). No entanto, para a equação $x^3 = 15x + 4$, tem-se: $a = -15 < 0$ e $b = -4 < 0$, o que resultou em:

$$x = \sqrt[3]{+\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}} + \sqrt[3]{+\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{+2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{+2 - \sqrt{-121}}.$$

Por causa desse resultado, Bombelli acreditava que a equação não devia ter solução, pois $\sqrt{-121},$ não é um número real, mas resolveu considerar $\sqrt{-1}$ como um número qualquer e, usando as mesmas regras da álgebra elementar, conseguiu mostrar que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$, obteve $a = 2,\ b = 1$ e daí $x = 4$, mostrando a raiz da equação que ele estava tentando resolver.

Segundo Boyer (2010), Bombelli escreveu sua obra *Álgebra* por volta de 1560, mas só foi impressa em 1572. Publicou parte de sua obra composta de cinco volumes, onde aparece pela primeira vez uma teoria dos números complexos razoavelmente bem estruturada, mas os livros IV e V estavam incompletos e só foram publicados em 1573, no ano seguinte à sua morte. Os demais trabalhos permaneceram como manuscrito até 1929.

Bombelli criou as seguintes regras para trabalhar com $\sqrt{-1}$:

$$(\sqrt{-1}) \times (\sqrt{-1}) = -1;$$
$$(-\sqrt{-1}) \times (\sqrt{-1}) = 1;$$
$$(-\sqrt{-1}) \times (-\sqrt{-1}) = -1.$$

Figura 8 - Raffaelle Bombelli (1526-1572)

Fonte: LEARN-MATH, 2015

Em 1629, Albert Girard (1590-1633) (Figura 9) escreve as raízes quadradas de números negativos na forma $a + b\sqrt{-1}$, ou seja, $2 + \sqrt{-16}$ = $2 + 4\sqrt{-1}$, quando enuncia as relações entre raízes e coeficientes de uma equação e, a partir daí, outros matemáticos fazem contribuições significativas para a compreensão dos complexos e estudam sobre esse impasse na matemática.

Figura 9 - Albert Girard (1590-1633)

Fonte: FATOSMATEMATICOS, 2015

Dada a notação $a + b\sqrt{-1}$, René Descartes, (1596-1650) (Figura 10) em 1637, designou os termos real e imaginário pela primeira vez; sendo a, parte real, e b, parte imaginária (SMOLE ; DINIZ, 2010).

Figura 10 - René Descartes (1596-1650)

Fonte: RENÉ, 2015

Em 1777, o símbolo i, para a representação de $\sqrt{-1}$, foi usado pela primeira vez por Leonhard Euler (1707-1783) (Figura 11). Nascido na Suiça, teve treze filhos, mas apenas cinco sobreviveram à infância. Em 1735, com fortes crises febris, desenvolveu catarata o que ocasionou cegueira no olho direito mas, mesmo com esse problema, tinha uma memória fenomenal e um poder de concentração incomum para continuar fazendo seu trabalho (EVES, 2011).

Os dois prêmios na academia de Paris, valeram-lhe uma oferta de trabalho na Alemanha como diretor de matemática da recém-fundada Academia de Berlim. Assumiu outros cargos, escreveu vários artigos e livros e em 1771, velho e doente, Euler teve sua casa destruída num incêndio. Tudo o que ele salvou foram seus manuscritos e foi nesta época que ele ficou totalmente cego. O impressionante é que mesmo depois disso ele continuou com seus projetos, e quase a metade de toda a sua produção científica foi concluída após esses incidentes, com a ajuda de dois de seus filhos e dois membros da academia (TIBÚRCIO, 2015).

Figura 11 - Leonhard Euler (1707-1783)

Fonte: TIBÚRCIO, 2015

Em 1797, Gaspar Wessel (1745-1818), representou geometricamente os números complexos $a + bi$, estabelecendo uma correspondência bijetiva entre estes e os pontos do plano, publicando seu trabalho em 1799 nas atas da academia dinamarquesa. Seu trabalho ficou praticamente esquecido e a interpretação geométrica foi amplamente aceita alguns anos mais tarde (SMOLE, 2010).

Após o uso por Karl Friedrich Gauss (1777-1855) (Figura 12), em 1801, é que foi aceita e popularizada a representação de $i = \sqrt{-1}$ e somente por volta de 1806 que os números complexos no plano cartesiano ganharam o devido respeito, quando a mesma representação de Wessel $(a + bi)$ foi publicada em francês, pelo suíço Jean-Robert Argand (1768-1822) (Figura 13). Por esse motivo, esta representação ficou, indevidamente, ligada ao nome de Argand.

Em 1813, Argand publicou um ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas (ROQUE, 2012).

Gauss estudou os trabalhos de Euler, Lagrange e Newton e em 1818 criou a geometria diferencial, tornando-se pioneiro da geometria não euclidiana, permitindo a representação de números complexos como pontos de um plano. Um grande passo no estudo dos números complexos foi a sua representação da forma $z = a + bi$ (IEZZI, 2005).

No ano de 1831, Gauss denominou de números complexos a representação realizada por Wessel, representado pela forma geométrica em um plano, pelo par ordenado (a, b).

Figura 12 - Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Fonte: GAUSS, 2014

Em seu trabalho, descreveu a adição, subtração e a multiplicação dos números complexos, que serviu como ferramenta para as fórmulas de Cardano-Tartaglia, em situações com raízes quadradas de números negativos.

Na virada do século XVIII para o século XIX, Wessel, Gauss, e Argand, redescobriram, independentemente, que esses números admitem uma representação geométrica.

Gauss imaginava essa representação por meio dos pontos de um plano, Wessel e Argand, usavam segmentos de reta orientados ou vetores coplanares para representar um número complexo (IEZZI, 2005).

Ainda no século XVIII, Abraham de Moivre (1667-1754) (Figura 14) introduziu métodos mais modernos como operações entre números complexos, relacionados com a trigonometria (BOYER, 2012).

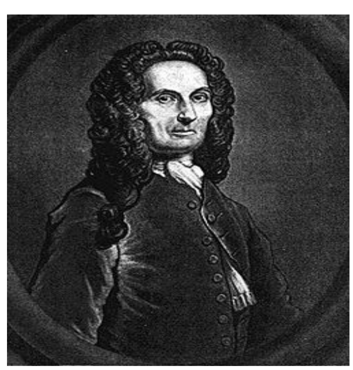
E, finalmente, Hamilton, em 1833, apresenta um longo e significante artigo à Academia Irlandesa, em que introduziu uma álgebra formal de pares de números reais cujas regras de combinação são precisamente as que hoje são dadas para números complexos.

Figura 13 - Jean-Robert Argand (1768-1822)

Fonte: DESAFIOS MATEMATICOS, 2015

A importante regra para multiplicação dos pares é, naturalmente, $(a,b).(\alpha,\beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$ e ele interpretava esse produto como uma operação envolvendo rotação. Aqui, vê-se o conceito definitivo de números complexos como par ordenado de números reais, ideia que estava indicada nas representações gráficas de Wessel, Argand e Gauss, mas que agora era explicitada pela primeira vez.e realizada até os dias de hoje (BOYER ; MERZBACH, 2012).

Figura 14 - Abraham de Moivre (1667-1754)



Fonte: MOIVRE, 2014

3 NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS REPRESENTAÇÕES

No início do século XX, desapareceram todos os vestígios de mistérios e desconfianças a respeito dos números complexos. Além de serem vistos nas formas de pares ordenados de números reais, já que $z = a + bi$, com a e b reais, também foram utilizados em funções logarítmica, exponencial, trigonométrica, entre outras.

Neste capítulo serão abordados assuntos como: concepções básicas do número complexo, bem como suas operações aritméticas, as formas algébricas e trigonométricas, além do plano de Argand-Gauss.

3.1 Forma algébrica

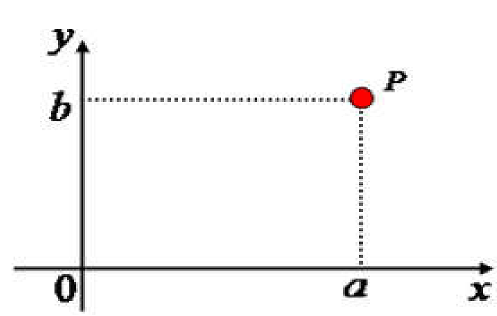
O conjunto dos números complexos é formado por um par ordenado (a, b), (Figura 15), onde os valores de a estão situados no eixo x (abscissa) e os valores de b no eixo y (ordenadas). Sobre o eixo x marcamos os pontos relacionados à parte real do número complexo e sobre o eixo y os pontos relacionados à parte imaginária Ripoll; Silveira (2011). Sendo P o ponto de coordenadas (a, b), a forma algébrica pela qual representamos um número complexo será $a + bi$, com a e b $\epsilon\ \mathbb{R}$, onde:

a é a parte real do número complexo z, denotada por *Re*(z)

e

b é parte imaginária do número complexo z, denotada por *Im*(z).

Figura 15 - Representação do par ordenado $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$



Fonte: NOÉ, 2014

Exemplo 3.1.1 Identifique a parte real e a parte imaginária de um número complexo:

a) $z = -3 + 5i \Rightarrow Re(z) = -3$, $Im(z) = 5$

b) $z = -5 + 10i \Rightarrow Re(z) = -5$, $Im(z) = 10$

c) $z = 1/2 + (1/3)i \Rightarrow Re(z) = 1/2$, $Im(z) = 1/3$

Com a utilização dos números complexos, podemos resolver equações do segundo grau, como, por exemplo:

$$x^2 + 3x + 4 = 0.$$

Temos que:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4.1.4 \Rightarrow \Delta = \sqrt{-7}.$$

Como $i^2 = -1$, temos que

$$\Delta = \sqrt{7.(-1)} = \sqrt{7.i^2} \Rightarrow \Delta = i\sqrt{7}.$$

De onde seguem as raízes:

$$x_1 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{-3 - i\sqrt{7}.}{2}$$

3.2 Operações com números complexos

Um número complexo na forma $z = a + bi$ pode ser associado ao par ordenado de números reais (a, b).

O conjunto dos números complexos é uma extensão do conjunto dos números reais. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão estão bem definidas para o conjunto dos complexos, assim como para os números reais.

Operamos com complexos na forma algébrica da mesma maneira que fazemos com expressões algébricas, lembrando apenas que $i^2 = -1$ (IEZZI, 2010).

Definição 3.2.1 Sejam $z_1 = (a + bi)$ e $z_2 = (c + di)$ números complexos, definimos:

(Adição) $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$, já que $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

(Subtração) $z_1 - z_2 = (a + bi - c - di) = (a - c) + (b - d)i$.

(Multiplicação) $z_1 \cdot z_2 = (ac + adi + bci + bdi^2) = (ac + adi + bci - bd) =$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

(Divisão) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{ac-adi+cbi+bd}{c^2-(-d^2)} =$

$$= \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}.$$

Exemplo 3.2.1

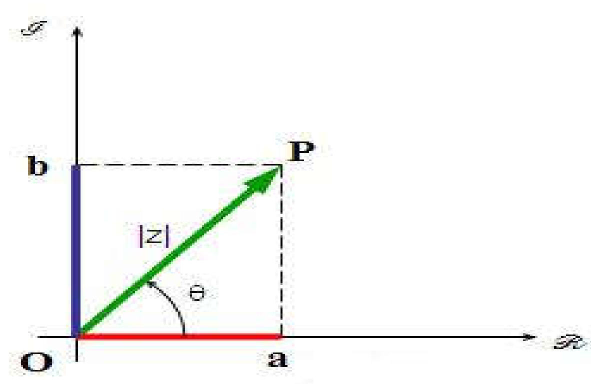
a) $(6 + 7i)\cdot(1 + i) = (6.1 - 7.1) + (6.1 + 7.1)i = (6 - 7) + (6 + 7)i = -1 + 13i.$

b) $(1 + 2i)^2 - (3 + 4i) = 1 + 4i + 4i^2 - 3 - 4i = 1 + 4i - 4 - 3 - 4i = -6.$

3.3 Representação geométrica

Os números complexos são representados geometricamente no plano complexo, também conhecido como plano de Argand-Gauss. Nele, representa-se a parte real no eixo horizontal (eixos das abscissas) e a parte imaginária no eixo vertical (eixos das ordenadas). Por exemplo, a representação do número complexo $z = a + bi$ no plano de Argand-Gauss, pode ser visto na (Figura 16), onde P denota o número complexo z, onde marcamos no eixo x (abscissa) o valor de a e no eixo y (ordenada) marcamos o valor de b.

Figura 16 - Plano de Argand-Gauss



Fonte: RIGONATTO, 2014

A cada número complexo $z = a + bi$, podemos associar um ponto P de coordenadas, $P = (a, b)$ no plano cartesiano. A este ponto P, correspondente ao complexo $z = a + bi$, chamamos de imagem ou afixo de z. Temos que

$\overline{OP}$ é a hipotenusa = $|z|$.

θ (argumento) é a medida do ângulo formado pelo segmento de reta $\overline{OP}$, medido no sentido anti horário com o eixo real.

Hamilton definiu o conjunto dos números complexos como o conjunto dos pares ordenados, (Figura 18), (a, b), onde a e b são números reais, identificando $(0,1)$ com $0 + i$ e $(1,0)$ com $1 + 0i$. Hamilton associou a multiplicação $(a, b).(x, y) = (ax - by,\ ay + bx)$ a uma operação envolvendo a rotação de vetores em torno da origem. Multiplicar por i envolve uma rotação de $90°$, multiplicar por $i^2 = -1$ envolve uma rotação de $180°$, multiplicar por $i^3 = -i$ envolve uma rotação de $270°$ e assim por diante (EZEQUIAS, 2014).

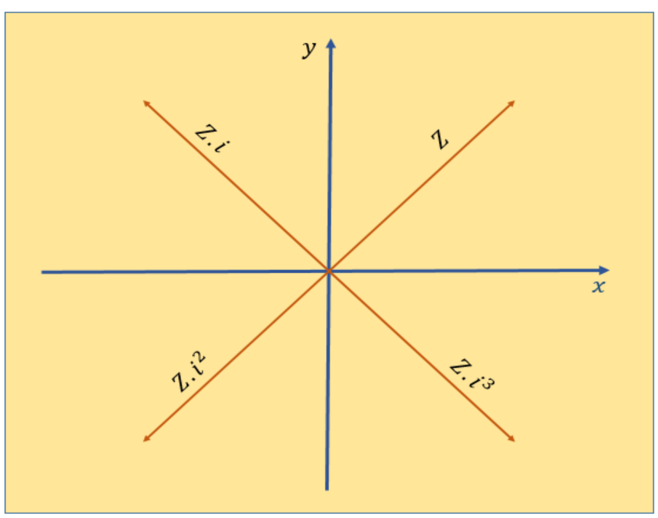
Exemplo 3.3.1 Seja $z = 1 + i$, note que:

a) $z\,.\,i = (1 + i).i = 1.i + i.i = i - 1$ → rotação de $90°$

b) $z\,.\,i^2 = (1 + i).i^2 = 1.i^2 + i.i^2 = -1 - i$ → rotação de $180°$

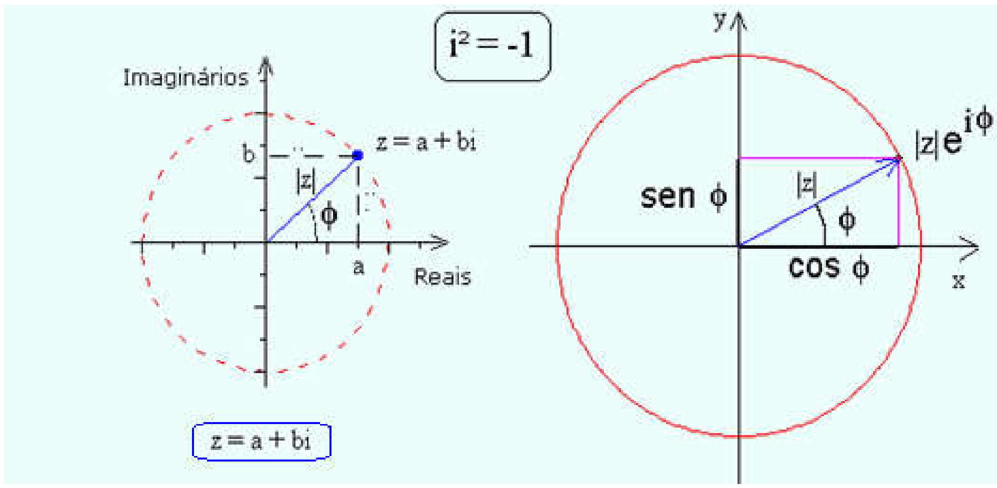
c) $z\,.\,i^3 = (1 + i).\ i^3 = 1.\ i^3 + i.\ i^3 = -i + 1$ → rotação de $270°$

Figura 17 - Interpretação geométrica do produto na forma polar



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 18 - Rotação de vetores em torno da origem



Fonte: EZEQUIAS, 2014

3.4 Forma trigonométrica

Os números complexos também possuem uma forma trigonométrica. No triângulo retângulo (Figura 16), podemos afirmar que, pelo teorema de Pitágoras, obtemos: $|z| = \sqrt{a^{2} + b^{2}}$.

Podemos escrever a e b em função de θ (argumento de um número complexo) e $|z|$ utilizando a trigonometria no triângulo retângulo.

$$sen\theta = \frac{b}{|z|} \Longrightarrow b = |z|.sen\theta,$$

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} \Longrightarrow a = |z|.cos\theta\ .$$

Substituindo as duas igualdades acima na forma algébrica de z, teremos:

$$z = |z|(cos\theta + i\ sen\theta),$$

que é a forma trigonométrica de z.

Além disso, da relação de Euler,

$$cos\theta + i\ sen\theta = e^{i\theta}.$$

e podemos então escrever z da seguinte forma:

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Exemplo 3.4.1 Considerando o número complexo; $z = 2\sqrt{3} + 2i$ e escrevendo na forma trigonométrica, temos que:

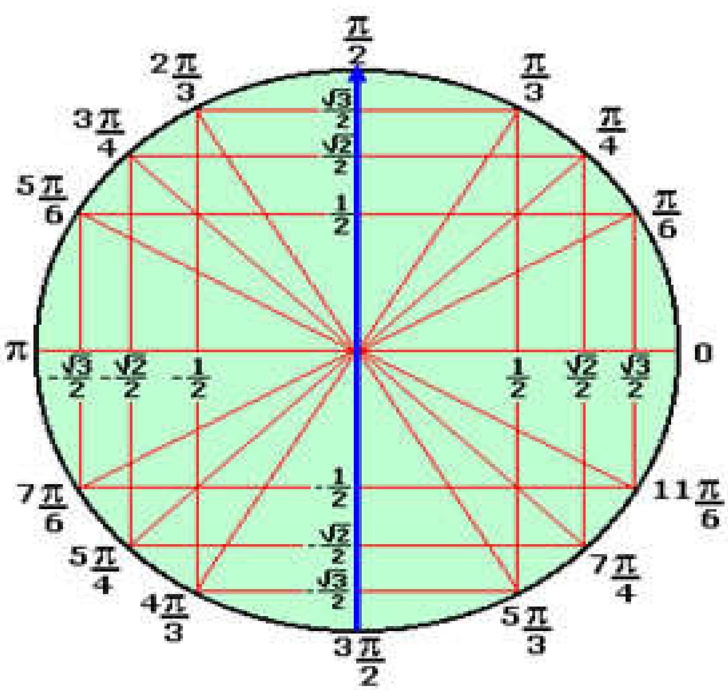
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4.3 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|z|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Com a utilização do ciclo trigonométrico (Figura 19), podemos determinar o ângulo que representa a solução do sistema acima.

Figura 19 - Ciclo trigonométrico



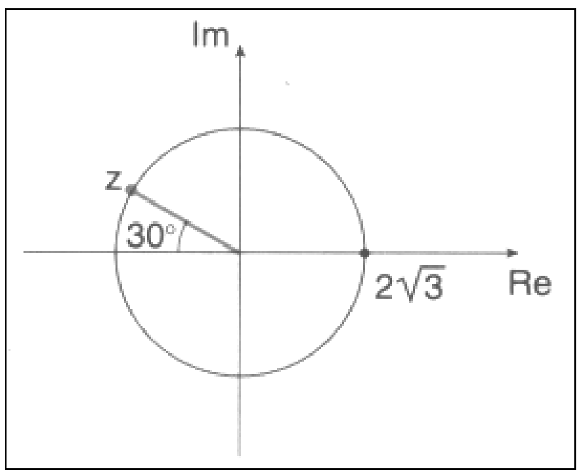
Fonte: NOÉ, 2014

..........Portanto, $\alpha = 30°$ e, assim, $z = 4\,(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)$.

Na Figura 20, temos a representação geométrica de um número complexo e vamos determinar a sua forma algébrica. Observe que a figura representa um círculo de raio $2\sqrt{3}$ e centro na origem. O número complexo marcado está $30°$ acima de $180°$. Logo, no sentido anti-horário, ele está no ângulo de $150°$.

O número é $z = 2\sqrt{3}\,(\cos 150° + isen150°)$ ou $z = 2\sqrt{3}.\left[\cos\frac{5\pi}{6} + isen\,\frac{5\pi}{6}\right]$ e sua representação algébrica é: $z = 2\sqrt{3}\,\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = -3 + 3i$.

Figura 20 - Representação geométrica de z



Fonte: TADEU, 2015

Definição 3.4.1 Sejam $z_1 = \rho_1\,(cos\theta_1 + i\,sen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2\,(cos\theta_2 + i\,sen\theta_2)$. definimos a multiplicação de z_1 por z_2 na forma polar por:

$$z_1 .\, z_2 = \rho_1 .\, \rho_2\,(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,sen(\theta_1 + \theta_2)).$$

Exemplo 3.4.2 Dados os números complexos:

$$z = 6\,(cos\,75° + i\,sen\,75°)$$

e

$$w = 2\,(cos\,15° + i\,sen\,15°),$$

temos

$$z \,.\, w \;=\; 12\;(cos\;90° \;+\; i\;sen\;90°) = \;12\;(0\;+\;i) = \;12i,$$

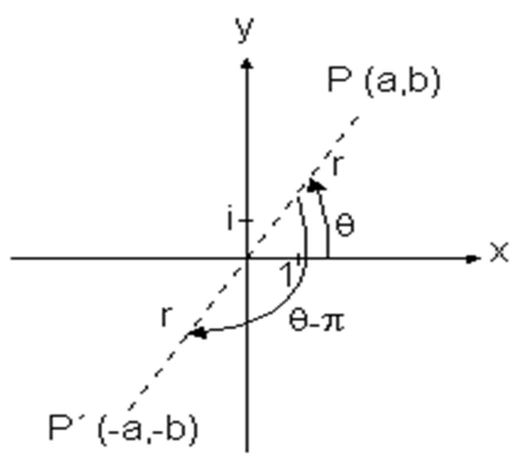
e

$$\frac{z}{w} \;=\; 3\;(\;cos\;60° \;+\; i\;sen\;60°) = \;\frac{3}{2} \;+\; i\left(3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Definição 3.4.2 O simétrico do número complexo $z = a + \boldsymbol{b}i$ é o número $-z = -(a + bi)$, ou seja $-z \;=\; (-a) \;+\; (-b)i$.

Representar o simétrico de um número complexo z, corresponde a efetuar uma rotação de $180°$ do afixo de z em torno da origem, conforme Figura 21.

Figura 21 - Simétrico de um número complexo



Fonte: UFRGS, 2014

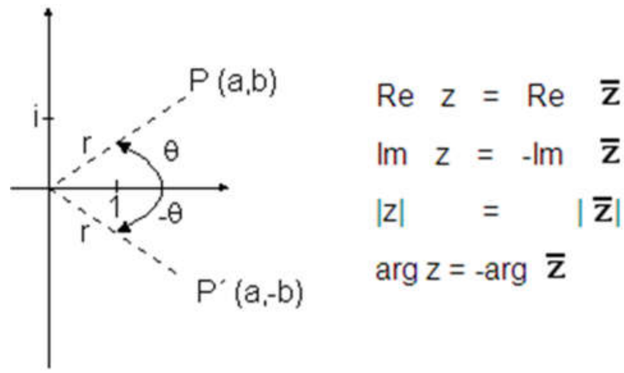
Definição 3.4.3 O conjugado de $z = a + bi$ é o número complexo definido por

$$\bar{z} \;\; = a - bi.$$

Na forma trigonométrica, o conjugado de $z = r(\cos\theta + i\;sen\theta)$ é

$$\bar{z} \;= r\big(\cos(-\theta) + isen(-\theta)\big).$$

Figura 22 – Conjugado de um número complexo



Fonte: Elaborado pelo autor

Exemplo 3.4.3 O conjugado de $z = 2 - 3i$ é o número complexo $\bar{z} = 2 + 3i$. Já na forma polar, se $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(45°) + i\, sen\,(45°))$, então

$$\bar{z} = \sqrt{2}(\cos(315°) + i\, sen\,(315°)).$$

Definição 3.4.4 Sendo $z = a + bi$, o seu inverso é definido por:

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{(a-bi)}{(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2 + b^2}.$$

De fato: $z = a + bi$ e $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$, obtemos:

$$z.z^{-1} = (a+bi).\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2 - abi + abi - (bi^2)}{(a^2+b^2)} =$$

$$\frac{a^2 - (bi^2)}{(a^2 + b^2)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Exemplo 3.4.4 Se $z = 1 - 4i$, então seu inverso é dado por:

$$z^{-1} = \frac{1}{1-4i} = \frac{1-(-4)i}{1^2 + (-4)^2} = \frac{1+4i}{17}$$

4 APLICAÇÕES EM ALGUMAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

A importância dos números complexos está marcada pelas suas múltiplas aplicações em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo na Matemática, Física, Engenharias, Computação Gráfica, Eletricidade e Eletrônica, Aerodinâmica, Geometria, Artes, entre outros.

4.1 Física quântica

A Equação de Schrödinger é uma equação diferencial parcial da mecânica quântica que descreve como o estado quântico de um sistema físico muda com o tempo. Por exemplo, a equação de Schrödinger dependente do tempo é dada por:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi,$$

onde i é a unidade imaginária, $\hbar$ é a constante de Planck dividida por $2\pi, \Psi$ é a função de onda do sistema quântico e $\hat{H}$ é operador Hamiltoniano, que caracteriza a energia total de uma dada função de onda.

4.2 Eletricidade e eletrônica

Na eletrônica e na eletricidade, a análise de circuitos de correntes alternadas, (Figura 23), é feita com a ajuda dos números complexos. Grandezas como a impedância (em ohms) e a potência aparente (em volt-ampere), são exemplos de quantidades complexas.

A impedância (em ohms) é o número complexo $Z = R + jX,$ ou na forma trigonométrica.

$$Z = |Z|(cos\theta + jsen\theta),$$

onde:

$j^2 = -1;$

θ é o ângulo de defasagem entre a tensão aplicada e a corrente no circuito;

$|Z|$ é o módulo da impedância;

R é a resistência elétrica (em ohms) e

X é a resultante (em ohms) das reatâncias indutivas e capacitivas do circuito.

A potência aparente é o número complexo $P = Pr + jPx$, ou

$P = |P|\,(\cos\theta + \ j\,\mathrm{sen}\,\theta)$ onde:

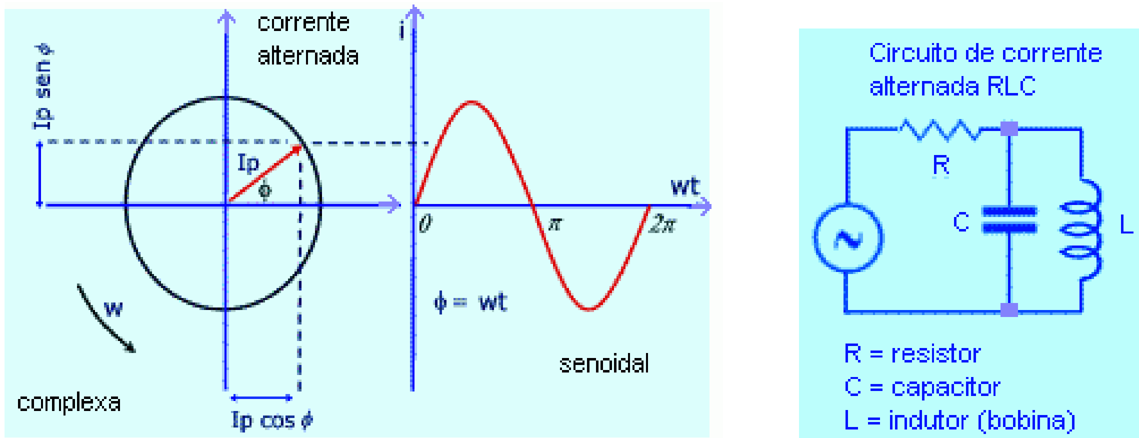
$j^2 = -1$;

$|P|$ é o módulo;

θ é o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente e Pr é a potência real.

O valor do $\cos\theta$ (fator de potência) é importante na determinação do aproveitamento da energia que está sendo gasta (EZEQUIAS, 2014).

Figura 23 - Ilustração de um circuito de corrente alternada



Fonte: EZEQUIAS, 2014

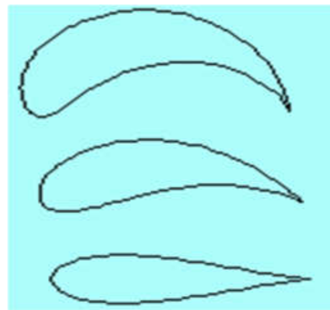
4.3 Aerodinâmica

Joukowski (1906), utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski) (Figura 24), e, usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria das funções complexas, deduziu a fórmula que permite calcular a força de levantamento responsável pela sustentação do voo de um avião (o ar que circula por cima da asa movimenta-se com mais velocidade que aquele que circula por baixo da asa) (SMOLE ; DINIZ, 2010):

$$F = x + yi = -ie^{i\alpha}\,(VKL\rho).$$

Os números complexos permitiram uma explicação matemática para o voo. A partir de então o progresso aeronáutico foi rápido.

Figura 24 - Perfil de uma asa de avião (Aerofólio de Joukowski)



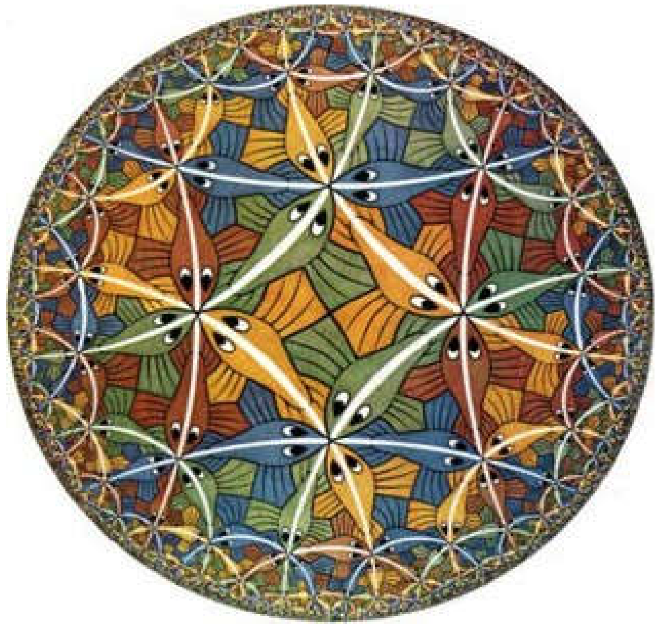
Fonte: EZEQUIAS, 2014

4.4. Geometria

Os números complexos são aplicados na utilização dos conceitos de rotação de pontos em um eixo de sistema cartesiano. Essas rotações foram utilizadas por Maurits C. Escher (1898-1972), considerado um dos artistas gráfico mais conhecido no mundo, um dos exemplos está na sua obra *Limite Circular III* (Figuras 25, 26 e 27).

Este contato com a arte árabe está na base do interesse e da paixão de Escher pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se transfiguram, se repetem e refletem a partir das pavimentações. Ao preencher as superfícies, porém, Escher substituía as figuras abstrato-geométricas comum na arte árabe, por figuras concretas, perceptíveis e existentes na natureza (apesar de altamente estilizadas), como pássaros, peixes, pessoas, répteis, etc. (SANTIAGO, 2015). Os eixos de simetria dos triângulos e quadrados que se encontram entre as linhas brancas são verdadeiras linhas hiperbólicas.

Figura 25 - O piso tritetragonal, uma telha hiperbólico de quadrados e triângulos equiláteros, sobreposta à imagem de Escher



Fonte: CIRCLE LIMIT III, 2015

4.4.1 Números Complexos e Simetria

A multiplicação de um número complexo $Z = |Z|.(cos\theta + i.sen\theta)$ por um complexo da forma $R_{\phi} = cos\,\phi + i.sen\,\phi$, de módulo 1, produz como resultado:

$$R_{\phi}.Z = |Z|.(\cos(\theta + \phi) + i.sen(\theta + \phi)),$$

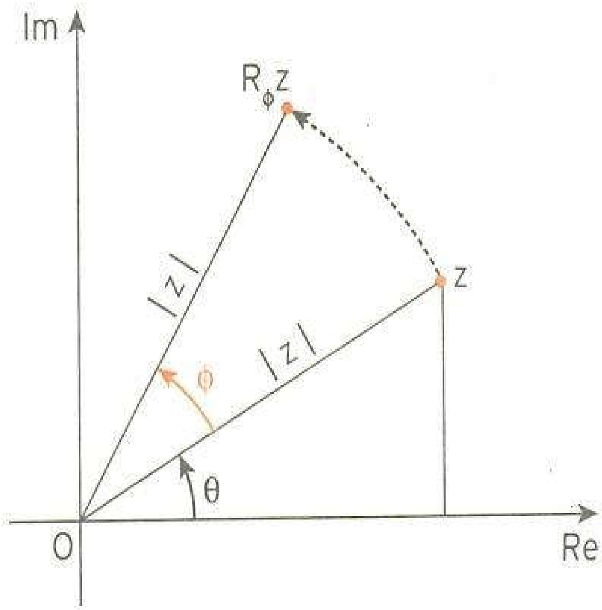
que é um número com o mesmo módulo de Z, mas com argumento igual à soma dos argumentos de Z e R_{ϕ}.

No plano complexo, isso corresponde a uma rotação do ponto Z por um ângulo ϕ em torno da origem (Figura 26).
A rotação pode ser pensada como uma função.

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$Z \mapsto R_{\phi}.Z$$

Figura 26 - Rotação do ponto z no plano complexo



Fonte: SMOLE; DINIZ, 2010

A rotação de imagens foi um dos recursos usados pelo artista Maurits C. Escher em suas obras. Observe que os quatro peixes do centro do quadro *Limite Circular III* (Figuras 27 e 28), correspondem à rotação de $90°$ em torno da origem dos pontos de cada figura (SMOLE; DINIZ, 2010). No plano complexo temos:

$$Z_1 = z.(cos\ 90° + i\ .\ sen\ 90°)$$

$$Z_1 = z\ .\ i, ou\ seja\ R_{90°} = i$$

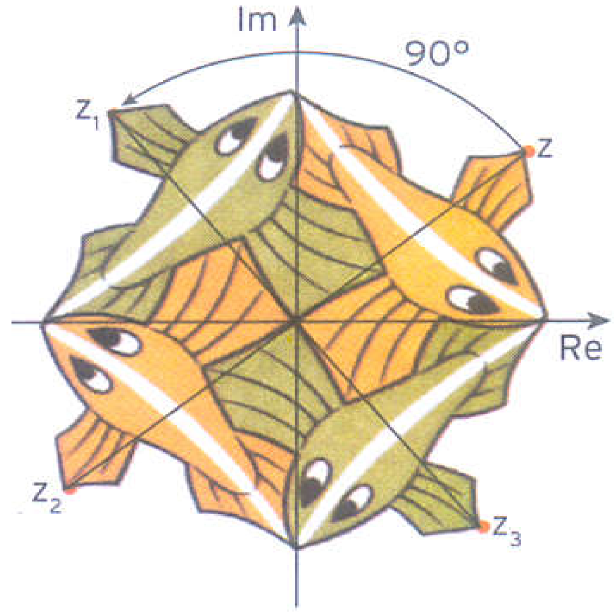
$$Z_2 = z_{1\ .\ i}$$

$$Z_3 = z_{2\ .\ i}$$

$$Z = z_{3\ .\ i}$$

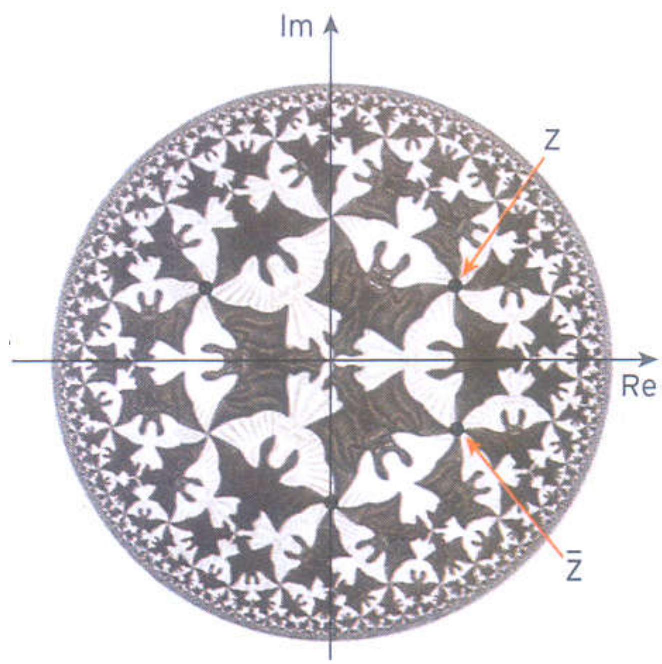
E o mesmo vale para todo ponto e seu correspondente nas quatro figuras.

Figura 27 - Quadro limite circular III (rotação de imagens no plano complexo)



Fonte: SMOLE; DINIZ, 2010

Figura 28 - Obra limite circular IV (céu e inferno)



Fonte: SMOLE; DINIZ, 2010

Na Figura 29, a multiplicação de números complexos também corresponde à reflexão de um ponto z em relação a uma reta r que passa pela origem e forma um ângulo ϕ com o eixo real.

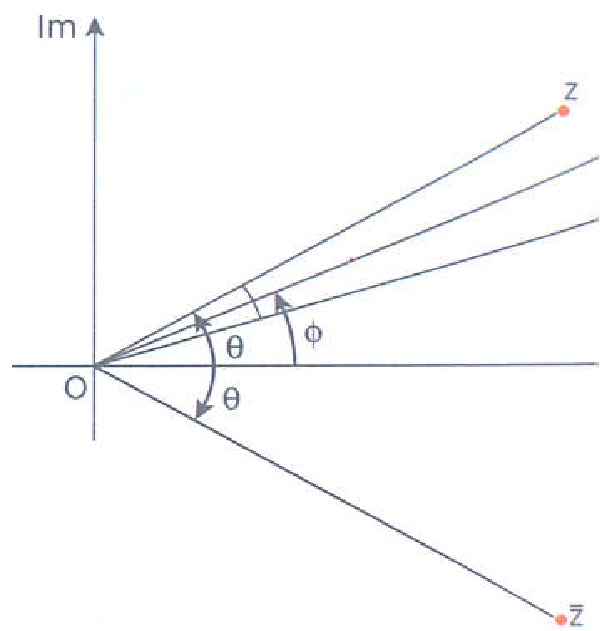
O produto simétrico de z em relação à reta r pode ser obtido pela rotação do conjunto $\bar{z}$ de z em torno da origem do ângulo, (Figura 29):

$$2\theta - 2(\theta - \phi) = 2\phi$$

Então, se $R_r = \cos 2\phi + i\,.sen 2\phi,$ a reflexão pode ser considerada como a função:

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto R_r\ .\ \bar{z}$$

Figura 29 - Rotação do conjugado $\bar{z}$ de z em torno da origem do ângulo



Fonte: SMOLE; DINIZ, 2010

Na Figura 30, de Escher, o demônio negro no primeiro quadrante é simétrico em relação à reta que passa pela origem com argumento $60°$.

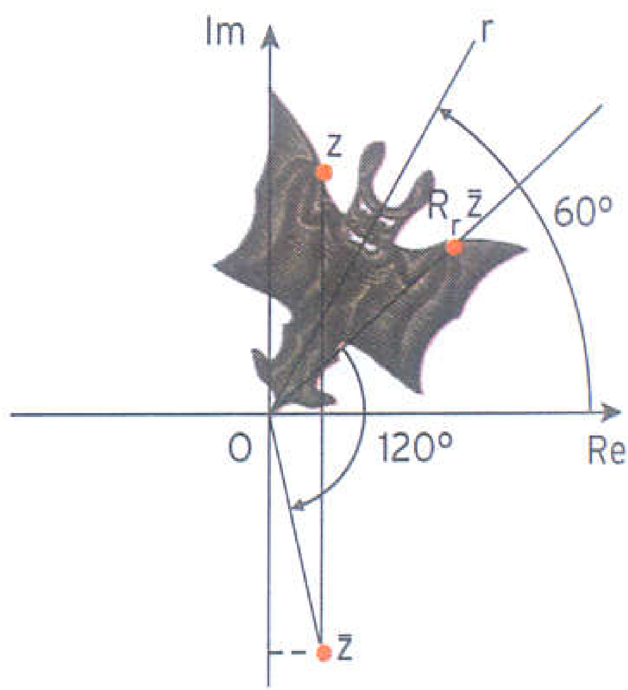
Assim, cada ponto de uma das metades da Figura 28 pode ser obtido como o produto do conjugado de um ponto da outra metade por:

$$\bar{z}\ .\ R_{2\phi}\ =\ \bar{z}\ .\ R_{120°}$$

$$R_{120°} = cos\ (120°) +\ i\ sen\ (120°)$$

$$R_{120°} = \ -\frac{1}{2} + i\ .\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Figura 30 - Simetria demônio negro de Escher



Fonte: SMOLE; DINIZ, 2010

4.5. Domínio de cores para funções de uma variável complexa

Chamamos de Mapa do Plano Complexo uma distribuição de cores num plano em que cada ponto desse plano (cada número complexo) pode ser identificado por sua respectiva cor.

Segundo Silva; Souza; Marques, (2015), no mapa (Figura 31), cada ponto do plano possui uma única cor (a menos da limitação humana de distinção) e, mais importante, cada cor aparece para apenas um único ponto, ou número complexo. Se dois números complexos são diferentes, as cores associadas a estes números também o serão. Existem, nessa distribuição, duas variações de cores perceptíveis: a angular (variação da composição da cor) e a modular (tonalidades claras e escuras). As variações angulares se dão em torno da origem e as distâncias, em relação a origem. Este comportamento coincide com uma característica dos números complexos: argumento e módulo, sendo, então, melhor observada utilizando a representação polar ($z = r\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$).

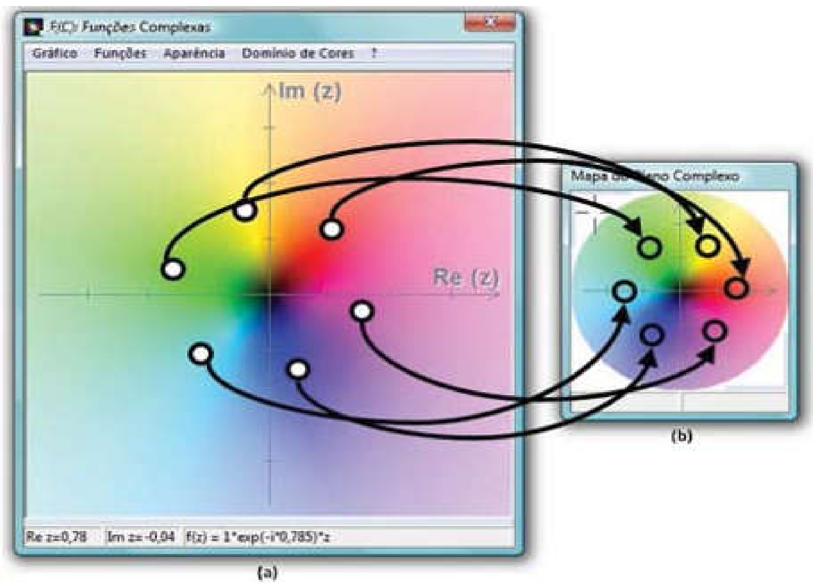
Assim, ao nos referirmos ao número $1 + 0i$ (ou a posição $(1, 0)$), por exemplo, estaremos utilizando a cor vermelha na tonalidade em que a distribuímos no mapa (Figura 31). Para representar o número $0 + 0i$ (ou a posição $(0, 0)$), utilizaremos a cor preta. E assim sucessivamente.

O conceito mais importante nessa representação é o de que a cor toma lugar do número complexo, e consequentemente, da posição. Essa substituição é bem proposital, uma vez que posição, enquanto representação, possui dimensão, ou seja, ocupa lugar no espaço. Já a cor, em termos menos rigorosos e imprecisos, não ocupa espaço físico. Um plano colorido não terá mais dimensões do que outro sem cores.

O gráfico de uma função de variável complexa (Figura 31), é representado da seguinte forma: é uma representação colorida em duas dimensões em que as posições cartesianas no gráfico representam os elementos do domínio (z) e as cores representam os elementos do conjunto imagem (w) da função. Cada ponto no plano possui uma cor associada, e é essa associação que distingue uma função de outra. Para cada função haverá uma associação única entre pontos e cores no gráfico (SILVA; SOUZA; MARQUES, 2015).

No entanto, é necessário atribuir um significado para os números complexos, para as cores. Para isso, há o suporte do mapa do plano complexo (Figura 31), cujo papel é o de auxiliar o usuário no processo de tradução de cor para número complexo. Cada gráfico precisa de um mapa para que haja significado. Para os estudos aqui tratados, foi utilizado o mapa apresentado na (Figura 31), onde mostra um esquema típico de leitura de gráficos gerados pelo domínio de cores (SILVA, SOUZA; MARQUES, 2015).

Figura 31 - Ilustração de um circuito de corrente alternada - Mapa de leitura de gráficos da função (domínio de cores)



Fonte: SILVA, SOUZA; MARQUES, 2015

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após o desenvolvimento deste trabalho, podemos entender que os números complexos são uma das tantas abstrações matemáticas que facilitam o cálculo e a resolução de muitos problemas. São utilizados em vários campos científicos e técnicos, durante o desenrolar de um problema, quando se quer extrair dados concretos para aplicar na realidade ou quando se transpõe um resultado de número complexo para o resultado em número real, que é o que podemos "medir" (não podemos medir com um instrumento físico um número complexo). Na realidade, todo número complexo está composto de duas partes; uma parte real e uma parte imaginária. Quando queremos extrair um resultado para aplicá-lo a nossas medições no mundo físico, usamos só a parte real do número complexo. Com tudo isto, podemos ver que os números complexos constituem uma estrutura algébrica que engloba a estrutura dos números reais.

Deve-se também a Gauss a designação **número complexo** e a ideia da relação biunívoca entre números complexos e pontos de um plano, o que permitiu uma definição concreta destes números e abriu caminho ao desenvolvimento do estudo dos números complexos e das funções complexas. Entretanto, a representação geométrica dos números complexos num plano, apareceu também nos trabalhos de Wessel, em 1799, e de Argand, em 1806, embora tenha passado despercebida aos matemáticos do tempo e não tenha sido explorada para prosseguir o estudo desses números. Finalmente, Gauss comunicou publicamente a identificação dos números complexos, em 1831, onde propôs definí-los, como pares ordenados de números reais com certas propriedades específicas e explorou esta definição e a sua identificação com pontos de um plano. A notação (a, b) para números complexos foi usada pela primeira vez por Hamilton, em 1837. O seu contexto histórico é muito interessante, pois mostra os impasses, as limitações, frustrações, debates e as reservas que os matemáticos tiveram perante esses números e finalmente o por que, e como foram aceitos. Podemos dizer que, apesar da sua história ser recente, os números complexos envolveram o trabalho de vários matemáticos continuando, ainda hoje, muitas questões em aberto. Hoje em dia, é bastante claro, para todos os que trabalham com Matemática, o papel central que exercem os números complexos, e de suas inúmeras utilidades. O “segredo” está na multiplicação dos complexos, que é essencialmente uma composição de rotações. É por isto que os complexos aparecem inevitavelmente em muitos problemas que envolvem rotação, círculo, funções circulares, funções trigonométricas, movimentos periódicos, corrente alternada, álgebra, astronomia, motores e mecânica quântica, etc.

Neste trabalho, fica evidenciada a importância e a aplicabilidade dos números complexos para a Matemática, onde apresentamos a sua história e como foi que eles surgiram através dos pensamentos de alguns matemáticos que tiveram que associar outras fórmulas matemáticas até chegar aos números complexos.

Os números complexos representam uma das estruturas mais importante da ciência. Atualmente, é impossível imaginar a engenharia elétrica, a aerodinâmica, ou a dinâmica dos fluidos, sem os números complexos. A mecânica quântica faz uso dos números complexos e, na teoria da relatividade de Einstein, o espaço tridimensional é visto como real e a dimensão relativa ao tempo como imaginário. No entanto, existe um distanciamento entre a forma com que este conteúdo é desenvolvido em sala de aula e sua aplicabilidade.

Percebe-se que o ensino do conteúdo de números complexos no Ensino Médio tem sido um desafio. Acredita-se que o processo de ensino e aprendizagem dos números complexos ocorre de maneira mais significativa quando o aluno entra em contato com o processo histórico do surgimento de tais números, descobrindo os motivos que levaram os matemáticos a extraírem as raízes quadradas de números negativos, fazendo com que eles percebam que a matemática não é inventada, mas que surge da resolução de problemas.

Neste sentido, concordamos com CAON (2013), que afirma que, conhecer essa história ou parte dela é muito importante para responder questões que surgem no processo de ensino e aprendizagem e que tratar os conteúdos matemáticos de forma contextualizada significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e a análise do contexto histórico dos números complexos. Mostra também que o surgimento dos mesmos está associado à resolução de equações de grau 3, corrigindo a falsa ideia de que surgiram para resolver equações de grau 2 com raízes quadradas de números negativos. Em paralelo, percebe-se que na formação do professor de matemática do Ensino Médio, fica claro a falta de aplicações práticas ou relacionadas ao cotidiano.

REFERÊNCIAS

ABRAHAN de Moivre. In: Wikipedia. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre>. Acesso em: 06 nov. 2014.

ARGAND, Jean-Robert. Desafios Matemáticos. Disponível em: <https://sites.google.com/site/desmatematicos/matematicos/argand-jean-robert-1768---1822>. Acesso em: 20 jun. 2015.

BOYER, C.B.; MERZBACH, U.C. **História da Matemática**. 3.ed. São Paulo: Ed. Blucher, 2012.

BRASIL Escola**. Rafael Bombelli**. Disponível em: <http://www.brasilescola.com/biografia/rafael-bombelli.htm>. Acesso em: 18 maio 2015.

CAMARGO, M. V. Pellegrinello; VRIESMAN, T. Cristina. **Evolução dos números complexos**. Disponível em: <http://tcconline.utp.br/wp-content/uploads//2012/08/A-EVOLUCAO-DOS-NUMEROS-COMPLEXOS-HISTORIA-E-APLICACOES.pdf>. Acesso em: 15 maio 2015.

CAON, Fernanda**. Números Complexos: inter-relaçao entre conteúdo e aplicações**. 72f. 2013. Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional – PROFMAT) – Setor de Ciências e Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná, 2013. Disponível em:<http://bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=926>. Acessado em: 06.out.2015.

CARDANO, Gerolamo. Disponível em: <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Cardano.html>. Acesso em: 19 jun. 2015.

CARL Frederich Gauss. In: Wikipedia. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss>. Acesso em: 06 nov. 2014

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria Números complexos.** 3.ed. Coleção do professor de matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 121 p.

CIRCLE Limit III. In: Wikipedia. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Circle_Limit_III>. Acesso em: 09 jun. 2015.

COLÉGIO Web. **Scipione del Ferro**. Disponível em: <http://www.colegioweb.com.br/biografia-letra-s/scipione-del-ferro.html>. Acesso em: 18 maio 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** Vol. único, ed. 1. São Paulo: Ática, 2005.

DIOFANTO de Alejandría. **Biografias y Vidas**. Disponível em: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/d/diofanto.htm>. Acesso em: 19 jun. 2015.

EVES, Howard. M. **Introdução à História da Matemática**. Campinas-SP: Ed. da Unicamp, 2004.

EVES, Howard. M. **Introdução à História da Matemática**. 5 ed. Campinas-SP: Ed. da Unicamp, 2011.

EZEQUIAS. **Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro**, **1998**. Disponível em: <http://www.profezequias.net/complexo.html>. Acesso em: 06 nov. 2014.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4 ed. – São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2010.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy. **Matemática Fundamental: Uma nova abordagem: Ensino Médio**: Vol. único. Coleção Delta. São Paulo: FTD, 2002. 712 p.

IEZZI, Gerson. **Fundamentos de Matemática Elementar.** vol. 6 – 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

IEZZI, Gerson [et.al]. **Matemática: Ciência e Aplicações.** ensino médio – vol. 3 – 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

MONZON, Larissa Weyh. A abordagem dos números complexos no Ensino Médio. **UFRGS**. Disponível em: <http://larissamonzon.pbworks.com/f/TC_numeroscomplexos.pdf>. Acesso em: 15 maio 2015.

NOÉ, Marcos. Plano de Argand-Gauss. **Brasil Escola.** Disponível em: <http://www.brasilescola.com/matematica/plano-argand-gauss.htm>. Acesso em: 06 nov. 2014.

NOÉ, Marcos. Forma Algébrica. **Brasil Escola.** Disponível em: <http://www.brasilescola.com/matematica/forma-algebrica.htm>. Acesso em: 20 ago. 2014.

NOÉ, Marcos. Fórmula de Heron de Alexandria. Mundo Educação. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/formula-heron.htm>. Acesso em: 19 jun. 2015.

NOÉ, Marcos. Simetria no Círculo Trigonométrico. **Brasil Escola.** Disponível em: <http://www.brasilescola.com/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm>. Acesso em: 20 out. 2014.

NÚMEROS Complexos, uma abordagem histórica, Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/complexoshistoria.htm>. Acesso em: 19 out. 2014.

RAFAEL Bombelli. **Math.Info**. Disponível em: <http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Bombelli>. Acessado em 18 maio 2015.

RENÉ Descartes. In: Wikipedia. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes>. Acesso em: 19 jun. 2015.

RIGONATTO, M. Forma trigonométrica de um número complexo. **Alunos Online.** Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/forma-trigonometrica-um-numero-complexo.html>. Acesso em: 21 ago.2014.

RIGONATTO, M. Operações com números complexos na forma trigonométrica. **Alunos Online.** Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/operacoes-com-numeros-complexos-na-forma-trigonometrica.html>. Acesso em: 21 ago.2014.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon e SILVEIRA, José Francisco Porto da. **Números Racionais, Reais e Complexos**. 2 ed. Porto Alegre: Ed. da UFRGS, 2011.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTIAGO, Emerson. Maurits Cornelis Escher. Info Escola. Disponível em: <http://www.infoescola.com/biografias/m-c-escher/>. Acesso em: 08 jun. 2015.

SCHRÖDINGER, E. **An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules**. Physical Review **28** (6): 1049–1070, 1926.

SÉRGIO, Paulo. As Relações de Girard. **Fatos Matemáticos.** Disponível em: <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2010/02/as-relacoes-de-girard.html> Acesso em: 18 maio de 2015.

SILVA, Edvaldo. Lima da.; SOUZA, Aguinaldo.R. de.; MARQUES, Emília. M. Rosa. Alguns estudos de fluxo de fluido utilizando software gráfico. **Revista Brasileira de Ensino de Física** Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172009000300008&lng=pt . Acesso em: 09 jun. 2015.

SILVA, Edvaldo. Lima da; SOUZA, Aguinaldo.R. de.; MARQUES, Emília. M. Rosa. **Funções de uma variável complexa**. Disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/~edvaldo. Acesso em 09 jun. 2015.

SIR WILLIAN Rowan Hamilton Biography. Disponível em: <http://www.thefamouspeople.com/profiles/sir-william-rowan-hamilton-552.php> Acesso em: 19 jun. 2015.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, I..V. Maria - **Matemática-Ensino Médio.** vol.3 – 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SPINELLI, W, SOUZA S.H.Maria. **Matemática para o ensino Médio 2º grau**. vol. 3. São Paulo. Ed. Scipione, 1996.

TADEU, W. Forma Algébrica. **Colégio Pedro II-**Unidade S. Cristóvão III. Disponível em <http://professorwaltertadeu.mat.br/GABlistaformatrigononumcomplexos.doc>. Acesso em: 20 jun. 2015.

TIBÚRCIO, C. Eduardo. **Leonhard Euler.** história da matemática. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/modulos/history/euler/euler.html>. Acesso em: 15 maio 2015.