

Contraexemplo em dimensão infinita do Teorema Espectral

Infinite dimension counterexample of the Spectrum Theorem

Paulo José Barreto da Silva

Prof. Dr. Dalton Couto Silva

2021

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso, iremos abordar o estudo de espaços vetoriais em dimensão finita na álgebra linear. Temos como objetivo demonstrar o “Teorema Espectral”, um dos teoremas mais importantes dentro da álgebra linear, e mostrar através de um contraexemplo, que ele não é válido em um espaço vetorial de dimensão infinita. Para isso trataremos um pouco da história que deu origem a Álgebra Linear como conhecemos hoje e sua estruturação axiomática. Além disso, abordaremos os conceitos básicos dentro da Álgebra Linear, que serão utilizados ao longo do trabalho e no “Teorema Espectral”, para facilitar a compreensão do leitor.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Espaços Vetoriais. Teorema Espectral.

Abstract

In this course conclusion work, we will approach the study of finite-dimensional vector spaces in linear algebra. We aim to demonstrate the "Spectral Theorem", one of the most important theorems within linear algebra, and shown through a counterexample, that it is not valid in an infinite dimensional vector space. For that we will treat a little of the history that gave rise to Linear Algebra as we know it today and its axiomatic structure, and we will address the basic concepts within Linear Algebra that will be used throughout the work and in the "Spectral Theorem", to facilitate the reader concepts and notations used here.

Keywords: Linear Algebra. Vector Spaces. Spectral Theorem.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Serviço de Biblioteca e Documentação do IFSP Câmpus Caraguatatuba

S586c Silva, Paulo José Barreto da
Contraexemplo em dimensão infinita do Teorema Espectral. /
Paulo José Barreto da Silva. -- Caraguatatuba, 2022.
21 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Dalton Couto da Silva.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em
Matemática) -- Instituto Federal de São Paulo, Caraguatatuba,
2022.

1. Matemática. 2. Álgebra linear. 3. Espaços vetoriais. 4.
Teorema espectral. I. Silva, Dalton Couto da, orient. II. Instituto
Federal de São Paulo. III. Título.

CDD: 510



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
CÂMPUS CARAGUATATUBA
FUC COORD CURSO SUP LICENC MATEMATICA

OFÍCIO N.º 12/2022 - CMAT-CAR/DAE-CAR/DRG/CAR/IFSP

Nome: SILVA, Paulo José Barreto da

Título: Contraexemplo em dimensão infinita do Teorema Espectral

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado de São Paulo, câmpu Caraguatatuba para a obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática.

Aprovado em: 8, Fevereiro de 2022

Banca Examinadora

Prof(a). Dalton Couto Silva

Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovado

Prof(a). Ronaldo Rodrigues Chaves

Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovado

Prof(a). Regina Thaise Ferreira Bento

Instituto Federal de São Paulo – Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovado

Documento assinado eletronicamente por:

- **Ronaldo Rodrigues Chaves**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 09/02/2022 10:55:16.
- **Dalton Couto Silva**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 09/02/2022 14:16:23.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 09/02/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifsp.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 293962

Código de Autenticação: 729862a948



OFÍCIO N.º 12/2022 - CMAT-CAR/DAE-CAR/DRG/CAR/IFSP

AVENIDA BAHIA, 1739, INDAIÁ, CARAGUATATUBA / SP, CEP 11665-071

*Dedico este trabalho à minha família, os gigantes aos quais me apoiei,
e por isso vi, o que eu jamais sonharia ter visto.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço principalmente à minha família, a qual me estenderam a mão nos momentos mais desafiantes da minha vida, em especial minha mãe Sueli Aparecida Barreto que foi o combustível ao longo de toda a minha jornada, e ao meu pai Valdir da Silva ao qual foi a bússola que mostrou o caminho em meio a tantas adversidades.

Aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o meu trajeto, em especial a Ana Carolina Cocato, Guilherme Toja Camilo, Henrique Bruno de Souza, Leixsciéli Lisandra Santos e Thaís Rocha Nobre que contribuíram em todas as maneiras possíveis em minha vida.

Agradeço aos professores, que compartilharam de seu conhecimento e experiência, em especial meu orientador Dalton Couto da Silva, que compartilhou de suas paixões e experiências que me orientaram ao longo dos meus estudos, e ainda me guiarão ao longo de toda a minha vida. Agradeço também aos professores Rafael Nogueira Luz que me incentivou no início de tudo, e se não fosse por você talvez não estaria aqui hoje. E a Ângela Maria dos Santos por seu carinho e amor aos alunos, ao qual me inspiram para essa linda profissão pedagógica.

E por fim agradeço aos professores da banca Regina Thaíse Ferreira Bento e Ronaldo Rodrigues Chaves por contribuírem diretamente com esse trabalho e na minha formação.

SUMÁRIO

1.	Introdução	5
2.	Espaços vetoriais	6
3.	Subespaço vetorial	7
4.	Combinação Linear	7
5.	Dependência e Independência linear	7
6.	Bases	8
7.	Transformações lineares	9
8.	Produto interno	10
9.	A adjunta.....	11
10.	Subespaços invariantes	12
11.	Operadores auto-adjuntos	14
12.	Contraexemplo em espaço de dimensão infinita do Teorema Espectral	17
13.	Considerações finais	20
14.	Referências	20

1. Introdução

Segundo Christensen [3], a álgebra linear se originou através de problemas envolvendo a resolução de sistemas lineares, a qual já se sabia a resolução de sistemas lineares dois por dois a cerca de 4.000 anos atrás na babilônia e três por três por volta do século II d.C. no livro “Nove Capítulos da Arte Matemática”. Porém o poder e o progresso da álgebra linear começou a tomar forma a partir do século XVII através das determinantes, ideia proposta por Leibnitz, que deu origem aos métodos “caracterizar os máximos e mínimos funções multivariadas” e a “resolução sistemas de equações lineares com base em determinantes” desenvolvidas por Lagrange e Cramer respectivamente.

No século XIX com o surgimento da “eliminação gaussiana” de Gauss, a qual estabeleceu um processo para a resolução de sistemas lineares, porém seu trabalho ainda não havia ligação com as matrizes. Em 1848 J.J. Sylvester introduziu o termo matriz, ele as via como geradoras de determinantes, porém a álgebra das matrizes só veio no trabalho de Arthur Cayley em 1855. A álgebra linear começou ser fortemente ligada as questões de física por causa da relação entre as matrizes e os vetores, ligação essa que desacelerou devido a segunda guerra mundial, onde os conceitos de álgebra linear foram aplicados a computação para resolver sistemas lineares com mais rapidez e precisão. Hoje a álgebra linear é difundida em várias áreas, como por exemplo: física, computação, equações diferenciais, entre outras, pois ela fornece uma base importante para muitos princípios e práticas.

A Álgebra Linear em sua base lida com espaços vetoriais e suas transformações lineares, ao qual quase todo o restante da teoria se sucede a partir destes conceitos muito bem definidos. Este trabalho abordará um pouco destes conceitos para lembrar o leitor, mas terá como foco o desenvolvimento dos conceitos das transformações adjuntas e auto-adjuntas em espaços vetoriais de dimensão finita.

Além de trabalhar com conceitos básicos, este trabalho tem por objetivo apresentar e demonstrar o “Teorema Espectral”, um dos grandes resultados da teoria. Como veremos, este teorema é enunciado apenas para espaços vetoriais de dimensão finita, e assim, a pergunta natural a ser feita é se o teorema também é válido em dimensão infinita. Esta pergunta será respondida na última seção deste trabalho, através de um exemplo.

O interesse do trabalho veio com a vontade de compreender as limitações de certos resultados da matemática pura a partir de exemplos menos abstratos, a fim de facilitar a compreensão do resultado em si. A álgebra linear foi escolhida pelo interesse em aprofundar os conhecimentos envolvendo as estruturas e resultados que envolvem vetores.

2. Espaços vetoriais

Nesta primeira seção, introduziremos os conceitos iniciais inerentes a álgebra linear, indispensáveis para o entendimento do nosso trabalho. Definiremos primeiramente o espaço vetorial, objeto principal do estudo da álgebra linear e seus axiomas e operações.

Um espaço vetorial E é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações:

- A adição, que a cada par de vetores $u, v \in E$ faz corresponder um novo vetor $u + v \in E$, chamado a *soma* de u e v .

- E a multiplicação por um número real, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada vetor $v \in E$ faz corresponder um vetor $\alpha \cdot v$, ou αv , chamado de *produto por escalar* de α por v .

Neste trabalho, iremos lidar apenas com espaços vetoriais no corpo dos reais \mathbb{R} .

Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in E$, as condições abaixo, chamados os *axiomas* de espaço vetorial:

- **Comutatividade:** $u + v = v + u$;
- **Associatividade:** $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
- **Vetor nulo:** Existe um vetor $\vec{0} \in E$, chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo $v \in E$;
- **Inverso aditivo:** Para cada vetor $v \in E$ existe um vetor $-v \in E$, chamado o *inverso aditivo*, ou *simétrico* de v , tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;
- **Distributividade:** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- **Multiplicação por 1:** $1 \cdot v = v$

Exemplo 2.1: Para todo número natural n , o símbolo \mathbb{R}^n representa o espaço vetorial euclidiano n -dimensional. Os elementos de \mathbb{R}^n são as listas ordenadas $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ de números reais. Por definição, a igualdade vetorial $u = v$ significa as n igualdades numéricas $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Os números $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são chamados as coordenadas do vetor u . As operações do espaço vetorial \mathbb{R}^n são definidas pondo $u + v = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$, $\alpha u = (\alpha\alpha_1, \dots, \alpha\alpha_n)$. O vetor zero é, por definição, aquele cujas coordenadas são todas iguais a zero: $0 = (0, \dots, 0)$. O inverso aditivo de $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é $-u = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$. Verifica-se, sem dificuldade, que estas definições fazem de \mathbb{R}^n um espaço vetorial. Para $n = 1$, tem-se $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ é a reta numérica. \mathbb{R}^2 é o plano euclidiano e \mathbb{R}^3 é o espaço euclidiano tridimensional da nossa experiência cotidiana.

Exemplo 2.2: Seja \mathbb{R}^∞ o conjunto formado por todas as sequências infinitas $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, com $a_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$, e apenas uma quantidade finita de a_i não nulos. Esse conjunto, com as operações de soma coordenada a coordenada e multiplicação por produto escalar é um espaço vetorial.

Observação: Os espaços vetoriais \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^∞ serão abordados em diversas situações ao longo deste trabalho.

3. Subespaço vetorial

Nesta seção, estudaremos subconjuntos de um espaço vetorial que ainda contenham suas propriedades, ou seja, um subconjunto que também é espaço vetorial.

Seja E um espaço vetorial. Um *subespaço vetorial* (ou simplesmente um subespaço) de E é um subconjunto $F \subset E$ com as seguintes propriedades:

- $0 \in F$;
- Se $u, v \in F$ então $u + v \in F$;
- Se $v \in F$ então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in F$.

Exemplo 3.1: Seja $v \in E$ um vetor não nulo. O conjunto $F = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ de todos os múltiplos de v é um subespaço de vetorial de E , chamado a *reta que passa pela origem e contém v* .

4. Combinação Linear

Sejam os vetores $v_1, \dots, v_n \in E$ e os números $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Qualquer vetor $v \in E$ da forma:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

é uma combinação linear dos vetores v_1, \dots, v_n .

Exemplo 4.1: No espaço vetorial \mathbb{R}^3 , o vetor $v = (-4, -18, 7)$, pode ser escrito como combinação linear de $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$. De fato:

$$v = 2(1, -3, 2) - 3(2, 4, -1) = 2v_1 - 3v_2.$$

5. Dependência e Independência linear

Na seção seguinte veremos uma forma de gerar um espaço vetorial a partir de um subconjunto X de E . Para que o conjunto X seja o mais simples possível, ou seja, com a menor quantidade possível de vetores, introduziremos o conceito de independência linear.

Seja E um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $X \subset E$ é *linearmente independente* (L.I.) quando nenhum vetor $v \in X$ é combinação linear de outros vetores de X

Os elementos de X são ditos vetores *linearmente independentes*. E $X \subset E$ é *linearmente dependente* (L.D) quando não é L.I.

Observação: Para evitar ambiguidade, no caso em que $X = \{v\}$ consta de um único elemento v , diz-se que X é L.I., por definição quando $v \neq 0$.

Exemplo 5.1: No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, o conjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é LD. De fato, examinando a equação:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$$

ou de modo equivalente:

$$\begin{bmatrix} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 & a_1 + a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a qual resulta em um sistema de solução $a_1 = -a_3$ e $a_2 = -2a_3$. Escolhendo $a_3 = 1$, obtemos $a_1 = -1$ e $a_2 = -2$. Portanto, A é L.D.

Teorema 5.2. Seja X um conjunto L.I. no espaço vetorial E . Se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ com $v_1, \dots, v_m \in X$ então $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. Reciprocamente, se a única combinação linear nula de vetores de X é aquela cujos coeficientes são todos iguais a zero, então X é um conjunto L.I.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que se tenha $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ com $v_1, \dots, v_m \in X$ mas nem todos os α_i sejam nulos. Por simplicidade, seja $\alpha_1 \neq 0$. Então teremos $v_1 = -\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)v_2 - \dots - \left(\frac{\alpha_m}{\alpha_1}\right)v_m$, o que exprime v_1 como combinação linear de outros elementos de X . Reciprocamente, se X não fosse L.I., algum dos seus vetores seria combinação linear dos demais: $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$, logo $1v - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_m v_m = 0$, uma combinação linear nula de vetores em X , na qual pelo menos o primeiro coeficiente não é zero.

6. Bases

Uma *base* de um espaço vetorial E é um conjunto $\mathcal{B} \subset E$ linearmente independente que gera E . Isto significa que todo vetor $v \in E$ se exprime, de modo único, como combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ de elementos v_1, \dots, v_n da base \mathcal{B} .

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ é uma base de E e $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$, então os números $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ chamam-se *coordenadas do vetor v na base \mathcal{B}* .

Diz-se que o espaço vetorial E tem *dimensão finita* quando admite uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ com um número finito n de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de E [Veja 6, Corolário 2, pág. 29], chama-se a *dimensão do espaço vetorial* E e escrevemos $n = \dim E$. Por definição, dizemos que o espaço vetorial $E = \{0\}$ tem dimensão zero.

Exemplo 6.1: Sejam os vetores $e_i \in \mathbb{R}^n$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ formados da seguinte forma:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

com 1 no i -ésimo termo e todos os outros termos iguais a 0. Temos que $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ forma uma base para \mathbb{R}^n chamada de base canônica de \mathbb{R}^n .

Observação: Existem bases de dimensão infinita, como no caso do espaço vetorial \mathbb{R}^∞ . Para esse espaço, temos os vetores $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ com 1 no i -ésimo termo, formando uma base $\mathcal{B} = \{e_i: i \in \mathbb{N}\}$, chamada base canônica de \mathbb{R}^∞ .

7. Transformações lineares

As transformações lineares trabalhadas nessa seção, tem um papel fundamental dentro da álgebra linear. Elas são funções, onde seus domínios e contradomínios são espaços vetoriais que preservam nossos axiomas.

Sejam E, F espaços vetoriais. Uma transformação linear $A: E \rightarrow F$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v \in E$ um vetor $A(v) = Av \in F$ de modo que valham, para quaisquer $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as relações:

$$A(u + v) = Au + Av,$$

$$A(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot Av.$$

Quando $E = F$, suas transformações $A: E \rightarrow E$ são chamadas de *operadores lineares* e as transformações lineares $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas de funcionais lineares, e seu espaço é denotado por E^* , chamado de espaço vetorial dual de E .

Exemplo 7.1: A transformação $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é linear, para todo $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$. De fato:

$$\begin{aligned} A((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= (3(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) = \\ &= (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2) = A(x_1, y_1) + A(x_2, y_2). \end{aligned}$$

$$A(\alpha(x, y)) = A(\alpha x, \alpha y) = (3\alpha x, -2\alpha y, \alpha x - \alpha y) = \alpha(3x, -2y, x - y) = \alpha A(x, y).$$

Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita e $A: E \rightarrow F$ uma transformação linear. Fixadas bases $V = \{v_1, \dots, v_n\} \subset E$ e $W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset F$, para cada $j = 1, \dots, n$ o vetor Av_j se exprime como combinação linear dos vetores da base W :

$$Av_j = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i.$$

Assim, a transformação linear $A: E \rightarrow F$ juntamente com as bases $V \subset E$ e $W \subset F$ determinam uma matriz $a = [a_{ij}] \in M(m \times n)$, chamada a matriz de A relativa a essas bases (ou nas bases V, W). Quando não houver confusão com relação às bases V e W , diremos apenas que a é a matriz de A . Por definição, a j -ésima coluna da matriz a é formada pelas coordenadas de Av_j em relação a base W , ou seja,

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.2: No exemplo anterior, verificamos que a transformação $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é linear. Tomemos as bases canônicas $\{(1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Temos que a matriz de A é:

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

de fato, $A(1,0) = (3,0,1)$ e $A(0,1) = (0,-2,-1)$.

Uma transformação linear $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ pode ser interpretada como uma matriz, considerando sua matriz $a = [a_{ij}] \in M(m \times n)$. Além disso, os vetores $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ passam a ser considerados como matrizes $n \times 1$ e $m \times 1$ respectivamente, ou seja, como vetores-coluna. Então a igualdade $Av = b$ passa a ser escrita sob a forma $av = b$, isto é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

8. Produto interno

Um produto interno é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par de vetores $u, v \in E$ um número real $\langle u, v \rangle$, chamado o produto interno de u por v , de modo que sejam validas as seguintes propriedades, para quaisquer $u, u', v, v' \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- **Bilinearidade:** $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$, $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$;
- **Comutatividade (simetria):** $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
- **Positividade:** $\langle u, u \rangle > 0$ se $u \neq 0$.

Exemplo 8.1: No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , o *produto interno canônico* dos vetores $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ é definido por $\langle u, v \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$. Este é o produto interno que consideraremos em \mathbb{R}^n .

Um conjunto $X \subset E$ é *ortonormal* se, e somente se, dados $u, v \in X$ tem-se $\langle u, v \rangle = 0$ se $u \neq v$ e $\langle u, v \rangle = 1$ se $v = u$.

Exemplo 8.2: No plano \mathbb{R}^2 os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (-1, 1)$ são ortogonais, porém, não formam um conjunto ortonormal. Entretanto, sendo

$$u' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ e } v' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

o conjunto $\{u', v'\} \subset \mathbb{R}^2$ é uma base ortonormal.

Seja a base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$, e tem-se $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} chama-se o *delta de Kronecker*, e possui as seguintes propriedades:

$$\delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \text{ e } \delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j.$$

9. A adjunta

Quando possuímos uma transformação $A: E \rightarrow F$, naturalmente nos perguntamos se é possível construir uma transformação $B: F \rightarrow E$. Para isso utilizaremos um espaço vetorial com produto interno, a fim de preservarmos os espaços E e F .

Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A *adjunta* de $A: E \rightarrow F$ é uma transformação linear $A^*: F \rightarrow E$ tal que, para $v \in E$ e $w \in F$ quaisquer se tenha:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle.$$

Exemplo 9.1: Seja a transformação $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A(x, y) = (2y, 3x + y, x + 2y)$, vejamos quem é sua adjunta $A^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Considere $u = (x, y)$ e $v = (a, b, c)$, temos que:

$$\begin{aligned} \langle A(x, y), (a, b, c) \rangle &= \langle (2y, 3x + y, x + 2y), (a, b, c) \rangle = 2ya + 3xb + yb + xc + 2yc = \\ &= x(3b + c) + y(2a + b + 2c) = \langle (x, y), (3b + c, 2a + b + 2c) \rangle = \langle (x, y), A^*(a, b, c) \rangle \end{aligned}$$

Logo, $A^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é $A^*(a, b, c) = (3b + c, 2a + b + 2c)$.

Seja E um espaço vetorial com produto interno. O *complemento ortogonal* de um conjunto não vazio $X \subset E$ é o conjunto X^\perp formado pelos vetores $v \in E$ que são ortogonais a todos os vetores $x \in X$. Portanto, $v \in X^\perp$, se e somente se, $\langle v, x \rangle = 0$, para todo $x \in X$.

Observação: Perceba que o conjunto X^\perp é um subespaço de E . De fato, sejam $v, u \in X^\perp$, $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer. Temos que, por definição $0 \in E$, que implica em $\langle x, 0 \rangle = 0$, logo $0 \in X^\perp$. Por definição, temos que $\langle v, x \rangle = \langle u, x \rangle = 0$, somando as equações temos que $\langle v, x \rangle + \langle u, x \rangle = 0$ e pela bilinearidade segue que $\langle v + u, x \rangle = 0$, ou seja, $v + u \in X^\perp$. Por definição temos que $\langle v, x \rangle = 0$, multiplicando por α em ambos os lados, resulta em $\alpha \langle v, x \rangle = 0$, novamente pela bilinearidade resulta em $\langle \alpha v, x \rangle = 0$. Portanto X^\perp é subespaço de E .

10. Subespaços invariantes

Diz-se que um subespaço vetorial $F \subset E$ é *invariante* pelo operador linear A quando $A(F) \subset F$, isto é, quando a imagem Av de qualquer vetor $v \in F$ é ainda um vetor em F .

Exemplo 10.1: Seja $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $A(x, y) = (3x, 8x - y)$, temos que os subespaços $S = \{(x, 2x) | x \in \mathbb{R}\}$ é invariante por A e $S' = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ não é invariante por A . De fato, seja $(x, 2x) \in S$, segue que $A(x, 2x) = (3x, 8x - 2x) = (3x, 6x)$, perceba que $3x = \alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, $A(x, 2x) = (\alpha, 2\alpha) \in S$, logo S é invariante por A . Agora, seja $(1, 0) \in S'$, então $A(1, 0) = (3, 8) \notin S'$, logo S' não é invariante por A .

Um vetor $v \neq 0$ em E chama-se um *autovetor* do operador $A: E \rightarrow E$ quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. O número $\lambda \in \mathbb{R}$, por sua vez, chama-se um *autovalor* do operador A quando existe um vetor não-nulo $v \in E$ tal que $Av = \lambda v$.

Um polinômio p na variável x escrito da forma:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

com $a_i \in \mathbb{R}$ é dito *Mônico* quando $a_n = 1$ e é dito *irreduzível* quando não é possível fatorá-lo em um produto de polinômios de grau menor. Por exemplo, $p_1(x) = x - 2$ é um polinômio mônico irreduzível. Já $p_2(x) = 3x - 7$ é apenas irreduzível. Quando o polinômio tem grau 2, ser irreduzível é equivalente a não possuir nenhuma raiz real. Por exemplo, o polinômio $p_3(x) = x^2 + 1$ é mônico e irreduzível, enquanto o polinômio $p_4(x) = x^2 - 3x + 2$ é mônico, porém não é irreduzível, pois é possível fatorá-lo como $p_4(x) = (x - 1)(x - 2)$. Vale observar que polinômios de grau maiores ou iguais a 3 sempre são reduzíveis, pois sempre é possível encontrar uma raiz real ou fatorá-lo em

polinômios de grau menor. Para exemplificar o que dissemos na última frase, tomemos o polinômio $p(x) = x^4 + 1$. Este polinômio tem grau 4, e, portanto, é redutível, de fato podemos fatorá-lo da seguinte forma:

$$p(x) = x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1)(x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1).$$

Lema. Para todo operador linear $A: E \rightarrow E$, num espaço vetorial de dimensão finita, existem um Polinômio Mônico irreduzível p , de grau 1 ou 2, e um vetor não-nulo $v \in E$, tais que $p(A) \cdot v = 0$.

Demonstração: Ver [6, Lema, pág. 147].

Teorema 10.1. Todo operador linear num espaço vetorial de dimensão finita possui um subespaço invariante de dimensão 1 ou 2.

Demonstração: Dado $A: E \rightarrow E$, sejam p o polinômio e $v \in E$ o vetor não-nulo dados pelo lema anterior, com $p(A) \cdot v = 0$. Se $p(x) = x - \lambda$ então $Av - \lambda v = 0$, donde $Av = \lambda v$, logo a reta que passa pela origem e contém v é um subespaço invariante por A , de dimensão 1. Se p tem grau 2, $p(x) = x^2 + ax + b$, então $A^2v + aAv + bv = p(A) \cdot v = 0$, logo $A(Av) = -aAv - bv$. Isto mostra que o subespaço gerado por v e Av é invariante por A . Além disso, v e Av são L.I. pois se tivéssemos $Av = \lambda v$ então $0 = A^2v + aAv + bv = \lambda^2v + a\lambda v + bv = (\lambda^2 + a\lambda + b)v$, donde $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, uma contradição pois $p(x) = x^2 + ax + b$ não tem raiz real. Logo o subespaço invariante gerado por v e Av tem dimensão 2. ■

Teorema 10.2. A autovalores diferentes do mesmo operador correspondem autovetores linearmente independentes.

Demonstração: Dado o operador linear $A: E \rightarrow E$, sejam v_1, \dots, v_m vetores não-nulos em E tais que $Av_1 = \lambda_1 v_1, \dots, Av_m = \lambda_m v_m$, onde os números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são dois a dois diferentes. Provaremos, por indução, que esses vetores são L.I. A afirmação é óbvia quando $m = 1$. Supondo-a verdadeira para $m - 1$ vetores, inferiremos daí sua validade para m . Dada a combinação linear nula

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0, (*)$$

aplicamos o operador A a ambos os membros desta igualdade, levando em conta que $Av_i = \lambda_i v_i$. Resulta então que

$$\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m v_m = 0. (**)$$

Multiplicando a igualdade (*) por λ_m e subtraindo de (**) vem:

$$(\lambda_1 - \lambda_m) \alpha_1 v_1 + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \alpha_{m-1} v_{m-1} = 0.$$

Pela hipótese de indução, os vetores v_1, \dots, v_{m-1} são L.I. Logo

$$(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 = \dots = (\lambda_{m-1} - \lambda_m)\alpha_{m-1} = 0.$$

Como os autovalores são todos diferentes, as $m - 1$ diferenças nos parênteses acima são diferentes de 0, logo $\alpha_1 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$. Isto reduz a igualdade (*) a $\alpha_m v_m = 0$. Como $v_m \neq 0$, segue-se que $\alpha_m = 0$. Assim, a igualdade (*) só pode ocorrer quando todos os coeficientes α_i são nulos, o que prova o teorema. ■

Corolário. Seja $\dim E = n$. Se um operador linear $A: E \rightarrow E$ possui n autovalores diferentes então existe uma base $\{v_1, \dots, v_n\} \subset E$ em relação a qual a matriz de A é diagonal (isto é, tem a forma $[a_{ij}]$ com $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$).

Exemplo 10.3: Dados o operador $A: E \rightarrow E$ e a base $\{u, v\} \subset E$, sejam $Au = au + cv$ e $Av = bu + dv$. Noutras palavras, a matriz do operador A na base $\{u, v\}$ é $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Então $(A - \lambda I)u = (a - \lambda)u + cv$ e $(A - \lambda I)v = bu + (d - \lambda)v$. A fim de que $A - \lambda I$ não seja invertível é necessário e suficiente que os vetores $(A - \lambda I)u$ e $(A - \lambda I)v$ sejam L.D., ou seja, que $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$, ou ainda, que λ seja raiz do polinômio $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$, chamado o polinômio característico do operador A . Portanto, o número real λ é um autovalor do operador $A: E \rightarrow E$, onde $\dim E = 2$, se, e somente se, uma raiz do polinômio característico do operador A , o qual, por definição, é $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$. Os coeficientes de $p(\lambda)$ são tirados da matriz de A em relação a uma base qualquer de E .

11. Operadores auto-adjuntos

Aqui estudaremos casos especiais de transformações que são adjuntas, onde a adjunta de uma transformação A , é a própria transformação A . Com essa propriedade podemos demonstrar nosso principal resultado, o Teorema Espectral, que se encontra nesta seção.

Um operador linear $A: E \rightarrow E$, num espaço vetorial munido de produto interno, chama-se *auto-adjunto* quando $A = A^*$, ou seja, quando $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ para quaisquer $u, v \in E$.

Se $A, B: E \rightarrow E$ são auto-adjuntos e $\alpha \in \mathbb{R}$ então:

$$\begin{aligned} \langle (A + B)u, v \rangle &= \langle Au + Bu, v \rangle = \langle Au, v \rangle + \langle Bu, v \rangle = \langle u, Av \rangle + \langle u, Bv \rangle = \langle u, (A + B)v \rangle \\ \langle (\alpha A)u, v \rangle &= \langle \alpha Au, v \rangle = \alpha \langle Au, v \rangle = \alpha \langle u, Av \rangle = \langle u, \alpha Av \rangle = \langle u, (\alpha A)v \rangle. \end{aligned}$$

Logo $A + B$ e αA são auto-adjuntos. Como

$$(AB)^* = B^*A^* = BA.$$

Logo, AB e auto-adjunto se, e somente se, $BA = AB$.

Teorema 11.1. $A: E \rightarrow E$ é auto-adjunto se, e somente se, sua matriz $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ relativa a uma base ortonormal $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ é uma matriz simétrica.

Demonstração: (\Rightarrow) Seja $[a_{ij}]$ a matriz relativa à base ortonormal $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ de A , temos que:

$$\langle u_i, Au_j \rangle = \langle u_i, a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{nj}u_n \rangle$$

$$\Rightarrow \langle u_i, Au_j \rangle = a_{1j}\langle u_i, u_1 \rangle + \dots + a_{ij}\langle u_i, u_i \rangle + \dots + a_{nj}\langle u_i, u_n \rangle = a_{ij}\langle u_i, u_i \rangle = a_{ij}$$

Analogamente, $\langle Au_i, u_j \rangle = a_{ji}$.

(\Leftarrow) Se $[a_{ij}]$ é simétrica, temos que $a_{ij} = a_{ji}$, ou seja, $\langle u_j, Au_i \rangle = \langle Au_j, u_i \rangle$ então A é auto-adjunto. ■

Teorema 11.2. Se o subespaço $F \subset E$ é invariante pelo operador linear $A: E \rightarrow E$ então seu complemento ortogonal F^\perp é invariante pelo operador adjunto $A^*: E \rightarrow E$.

Demonstração: Seja $u \in F$ e $v \in F^\perp$ qualquer, então:

$$Au \in F \Rightarrow \langle Au, v \rangle = 0 = \langle u, A^*v \rangle \Rightarrow A^*v \in F^\perp.$$

Portanto, F^\perp é invariante pelo operador A^* . ■

Teorema 11.3. Seja $A: E \rightarrow E$ um operador auto-adjunto. Se o subespaço $F \subset E$ é invariante por A , seu complemento ortogonal F^\perp também é.

Demonstração: Decorre do Teorema 11.2, que F^\perp é invariante por A^* . Como A é auto-adjunto, ou seja $A = A^*$, segue que F^\perp é invariante por A .

Teorema 11.4. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são autovalores dois a dois diferentes do operador auto-adjunto $A: E \rightarrow E$, os autovetores correspondentes v_1, \dots, v_m são dois a dois ortogonais.

Demonstração: Para $\lambda_i \neq \lambda_j$ quaisquer, temos:

$$(\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \langle Av_i, v_j \rangle - \langle v_i, Av_j \rangle = 0 \text{ (A é auto-adjunto)}.$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$, então $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, de $(\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j \rangle = 0$ resulta $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. ■

Teorema 11.5. Seja $A: E \rightarrow E$ um operador auto-adjunto num espaço vetorial de dimensão 2, munido de produto interno. Existe uma base ortonormal $\{u_1, u_2\} \subset E$ formada por autovetores de A .

Demonstração: Seja $\{v, w\} \subset E$ uma base ortonormal arbitrária. Em virtude do Teorema 11.1, temos $Av = av + bw$ e $Aw = bv + cw$, ou seja, $[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Como vimos antes no Exemplo 10.3, os autovalores λ_n de A são as raízes reais do polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2)$. O discriminante deste trinômio é:

$$\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Se $\Delta = 0$, então $b = 0$ e $a = c$, ou seja, $[A] = aI = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Logo todo vetor não-nulo em E é um autovetor, pois, para todo vetor $u \in E$, temos que $Au = aIu = au$.

Se $\Delta > 0$, então o trinômio $p(\lambda)$ possui 2 raízes reais distintas λ_1, λ_2 . Isto, como sabemos, quer dizer que os operadores $[A - \lambda_1 I]$ e $[A - \lambda_2 I]$ são ambos não invertíveis, logo existem vetores não-nulos (que podemos supor unitários) $u_1, u_2 \in E$ tais que $(A - \lambda_1 I)u_1 = 0$ e $(A - \lambda_2 I)u_2 = 0$, então $Au_1 = \lambda_1 u_1 + 0 \cdot u_2$ e $Au_2 = \lambda_2 u_2 + 0 \cdot u_1$. Pelo Teorema 11.4, $\{u_1, u_2\} \subset E$ é uma base ortonormal de autovetores de A . ■

Corolário. Todo operador auto-adjunto $A: E \rightarrow E$, num espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, possui um autovetor.

Demonstração: Com efeito, pelo Teorema 10.1 existe um subespaço $F \subset E$, de dimensão 1 ou 2, invariante por A . Se $\dim F = 1$ todo vetor não-nulo $v \in F$ é um autovetor de A . Se $\dim F = 2$ então, aplicando o Teorema 11.5 a restrição $A: F \rightarrow F$ de A ao subespaço invariante F , obtemos um autovetor $v \in F$. ■

A seguir teremos o teorema mais importante desse trabalho, e um dos teoremas mais importantes dentro da álgebra linear, ao qual incentivou a produção deste trabalho. Nele se baseará o contraexemplo em um espaço vetorial de dimensão infinita.

Teorema 11.6. (Teorema Espectral.) Seja o operador $A: E \rightarrow E$ num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno. Existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ formada por autovetores de A se, e somente se, $A: E \rightarrow E$ é auto-adjunto.

Demonstração: (\Rightarrow) Se existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ formada por autovetores do operador $A: E \rightarrow E$, para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$, temos que:

$$\langle Au_i, u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle = \lambda_i \delta_{i,j}$$

Onde $\delta_{i,j}$ é o símbolo de Kronecker: Se $i \neq j$ então $\delta_{i,j} = 0$, se $i = j$, então $\delta_{i,j} = 1$.

Se $i \neq j$, implica em:

$$\langle Au_i, u_j \rangle = \lambda_i 0 = \lambda_j 0 = \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle = \langle u_i, \lambda_j u_j \rangle = \langle u_i, Au_j \rangle$$

Se $i = j$, então $\lambda_i = \lambda_j$, implica em:

$$\langle Au_i, u_j \rangle = \lambda_i \cdot 1 = \lambda_j \cdot 1 = \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle = \langle u_i, \lambda_j u_j \rangle = \langle u_i, Au_j \rangle$$

Logo, $\langle Au_i, u_j \rangle = \langle u_i, Au_j \rangle$, ou seja, $A: E \rightarrow E$ é auto-adjunto.

(\Leftarrow) Reciprocamente, usaremos indução na dimensão de E . Se $\dim E = 1$, então, seja $v \in E$ unitário, então $Av = \lambda v$, logo $\{v\}$ é uma base ortonormal de A formada por um autovetor.

Supondo-o verdadeiro em dimensão $n - 1$, seja $\dim E = n$. Pelo *Corolário do Teorema 11.5*, existe um autovetor unitário u_n , portanto um subespaço $F \subset E$, de dimensão 1, invariante por A . Pelo *Teorema 11.3*, o complemento ortogonal F^\perp também é invariante por A .

Como $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$, então $\dim F^\perp = n - 1$, a hipótese de indução assegura a existência de uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \subset F^\perp$ formada por autovetores da restrição $A: F^\perp \rightarrow F^\perp$. Como u_n é um autovetor unitário de F , então ele é ortogonal a todos os elementos de $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$, ou seja, o conjunto $\{u_1, \dots, u_{n-1}, u_n\}$ é L.I. Logo $\{u_1, \dots, u_{n-1}, u_n\} \subset E$ é uma base ortonormal formada por autovetores de A . ■

12. Contraexemplo em espaço de dimensão infinita do Teorema Espectral

Antes do contraexemplo, vejamos quem é o espaço vetorial \mathbb{R}^∞ trabalhado nesta seção. O espaço \mathbb{R}^∞ é o espaço das sequências $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ tal que $a_i \in \mathbb{R}$ e $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e os vetores canônicos $e_i \in \mathbb{R}^\infty$ formados da seguinte forma, $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0, \dots)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, \dots)$ com 1 no i -ésimo termo e todos os outros termos iguais a 0 e $\mathcal{B} = \{e_i \in \mathbb{R}^\infty | i \in \mathbb{N}\}$ é uma base para \mathbb{R}^∞ . Seja seu produto escalar definido da seguinte forma $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ se $i = j$ e $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$. Todo elemento do espaço vetorial \mathbb{R}^∞ é uma combinação linear finita $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$.

Vamos agora construir um operador auto-adjunto neste espaço que não possui autovetores. Este operador será uma justificativa para a necessidade da hipótese de dimensão finita presente no Teorema Espectral.

Seja $T: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ o operador linear definido por:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_2 \\ T(e_i) &= e_{i-1} + e_{i+1}, \text{ se } i > 1 \end{aligned}$$

- Vamos verificar que o operador linear T é auto-adjunto:

Dados u e v em \mathbb{R}^∞ , escrevemos

$$\begin{aligned} u &= a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \\ v &= b_1 e_1 + \dots + b_n e_n \end{aligned}$$

Não há problema em supor que u e v sejam combinações de e_1, \dots, e_n , porque, se um deles, digamos v , for combinação de e_1, \dots, e_m com $m < n$, também será combinação de e_1, \dots, e_n com $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$. Temos então:

$$T(u) = T\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = T(a_1 e_1) + T\left(\sum_{i=2}^n a_i e_i\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow T(u) &= a_1 e_2 + \sum_{i=2}^n a_i (e_{i+1} + e_{i-1}) = a_1 e_2 + \sum_{i=2}^n a_i e_{i+1} + \sum_{i=2}^n a_i e_{i-1} \\ \Rightarrow T(u) &= \sum_{i=1}^n a_i e_{i+1} + \sum_{i=2}^n a_i e_{i-1}\end{aligned}$$

Fazendo $j = i + 1$ no primeiro somatório acima, e fazendo $j = i - 1$ no segundo, obtemos:

$$T(u) = \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1} e_j + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} e_j$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle T(u), v \rangle &= \left\langle \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1} e_j + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} e_j, \sum_{j=1}^n b_j e_j \right\rangle = \\ \langle T(u), v \rangle &= \left\langle \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1} e_j, \sum_{j=1}^n b_j e_j \right\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} e_j, \sum_{j=1}^n b_j e_j \right\rangle = \\ \langle a_1 e_2 + \dots + a_n e_{n+1}, b_1 e_1 + \dots + b_n e_n \rangle &+ \langle a_2 e_1 + \dots + a_n e_{n-1}, b_1 e_1 + \dots + b_n e_n \rangle = \\ \langle a_1 e_2, b_2 e_2 \rangle + \dots + \langle a_{n-1} e_n, b_n e_n \rangle &+ \langle a_2 e_1, b_1 e_1 \rangle + \dots + \langle a_n e_{n-1}, b_{n-1} e_{n-1} \rangle = \\ a_1 b_2 \delta_{2,2} + \dots + a_{n-1} b_n \delta_{n,n} &+ a_2 b_1 \delta_{1,1} + \dots + a_n b_{n-1} \delta_{n-1,n-1}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle T(u), v \rangle = \sum_{j=2}^n a_{j-1} b_j + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} b_j$$

Trocando j por i como índice do penúltimo somatório obtemos:

$$\langle T(u), v \rangle = \sum_{i=2}^n a_{i-1} b_i + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} b_j. \quad (1)$$

Analogamente,

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n b_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n b_i e_{i+1} + \sum_{i=2}^n b_i e_{i-1} = \sum_{j=2}^{n+1} b_{j-1} e_j + \sum_{j=1}^{n-1} b_{j+1} e_j.$$

Logo,

$$\langle u, T(v) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{j=2}^{n+1} b_{j-1} e_j + \sum_{j=1}^{n-1} b_{j+1} e_j \right\rangle =$$

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{j=2}^{n+1} b_{j-1} e_j \right\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{j=1}^{n-1} b_{j+1} e_j \right\rangle =$$

$$\langle a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, b_1 e_2 + \dots + b_n e_{n+1} \rangle + \langle a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, b_2 e_1 + \dots + b_n e_{n-1} \rangle =$$

$$\langle a_2 e_2, b_1 e_2 \rangle + \dots + \langle a_n e_n, b_{n-1} e_n \rangle + \langle a_1 e_1, b_2 e_1 \rangle + \dots + \langle a_{n-1} e_{n-1}, b_n e_{n-1} \rangle =$$

$$a_2 b_1 \delta_{2,2} + \dots + a_n b_{n-1} \delta_{n,n} + a_1 b_2 \delta_{1,1} + \dots + a_{n-1} b_n \delta_{n-1,n-1}.$$

Logo,

$$= \sum_{j=2}^n a_j b_{j-1} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j b_{j+1}$$

Trocando, na última igualdade j por k como índice do primeiro somatório e j por l como índice do segundo, obtemos:

$$\langle u, T(v) \rangle = \sum_{k=2}^n a_k b_{k-1} + \sum_{l=1}^{n-1} a_l b_{l+1}. \quad (2)$$

Fazendo $l = i - 1$ no segundo somatório de (2), vemos que ele é igual ao primeiro somatório de (1).

$$\langle u, T(v) \rangle = \sum_{k=2}^n a_k b_{k-1} + \sum_{i=2}^n a_{i-1} b_i$$

Fazendo $k = j + 1$ no primeiro somatório de (2), vemos que ele é igual ao segundo somatório de (1).

$$\langle u, T(v) \rangle = \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} b_j + \sum_{i=2}^n a_{i-1} b_i$$

Assim, $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ e T é auto-adjunto.

- Vamos agora mostrar que o operador linear T não tem autovetores:

Suponha que $u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, com $a_n \neq 0$, é um elemento não nulo de \mathbb{R}^∞ . Logo,

$$T(u) = a_2 e_1 + (a_1 + a_3) e_2 + \dots + (a_{n+2} + a_n) e_{n-1} + a_{n-1} e_n + a_n e_{n+1}$$

Como $a_n \neq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(u)$ não pode ser igual a λu , e T não tem autovetores.

Com isso, concluímos que o Teorema Espectral não vale em dimensão infinita.

13. Considerações finais

Iniciamos este trabalho abordando um pouco da história que deu origem a álgebra linear, a qual em seguida foi apresentada sua estrutura axiomática e suas primeiras definições, para que fique claro ao leitor quais conceitos serão utilizados ao longo do trabalho. Todos esses conceitos são acompanhados de exemplos simples, a fim de facilitar a compreensão das definições e notações aqui utilizadas, também presentes no principal teorema deste trabalho.

Ao fim, apresentamos e demonstramos um dos teoremas mais importantes dentro da álgebra linear, o “Teorema Espectral”, que é definido apenas para espaços vetoriais finitos. Um questionamento natural pode ser feito com relação à necessidade da hipótese de dimensão finita. Com esse questionamento em mente, apresentamos um contraexemplo em espaço vetorial de dimensão infinita que mostra que de fato o Teorema só é válido para espaços vetoriais finitos.

Com este trabalho, procuramos deixar clara a importância de trabalhar com exemplos concretos. De fato, o Teorema Espectral é um resultado teórico importante da Álgebra Linear, mas sem alguma concretização, a sua compreensão pode se tornar mais complexa. O questionamento a respeito das hipóteses de um teorema é outro exercício que deveria ser mais realizado em sala de aula, e que está intimamente ligado com o uso de exemplos concretos. A utilização inteligente desses dois recursos em sala de aula pode ser um importante aliado para a aprendizagem.

Naturalmente esse trabalho pode se estender ainda mais, seja: 1) para o estudo do Teorema Espectral em sua forma matricial ou ainda em espaços complexos; 2) em estudos dentro de espaços vetoriais finitos como acontece em outros teoremas, por exemplo o Teorema dos Valores Singulares, que é outro teorema muito importante dentro da Álgebra linear; 3) o estudo de espaços de dimensão infinita, como é o caso da Análise Funcional.

14. Referências

- [1] ANDRADE, José Fernandes Silva. **Tópicos especiais em álgebra**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [2] ANTON, Howard. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- [3] CHRISTENSEN, Jeff. **A Brief History of Linear Algebra**. Grant Gustafson: Univ. Utah, 2012.
- [4] COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2018.

- [5] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [7] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.