

# Teorema de Napoleão e suas demonstrações

## Napoleon's Theorem and its demonstrations

Ana Carolina Cocato Toledo Adriano

Prof. Dr. Dalton Couto Silva

### Resumo

A trigonometria é um recurso potente de cálculo que nos permite determinar distâncias inacessíveis, tanto na matemática como no estudo de fenômenos físicos, assim como a geometria que é de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio visual e facilita a interdisciplinaridade entre diversos temas. O presente trabalho aborda noções de trigonometria e geometria plana que darão fundamentação teórica às demonstrações do Teorema de Napoleão. No primeiro capítulo, são abordados resultados da geometria plana. No segundo capítulo, são abordados resultados da trigonometria. No terceiro capítulo, são apresentadas as demonstrações do teorema principal enfocando suas demonstrações por trigonometria, por geometria plana e por arcos capazes.

**Palavras-chave:** Teorema de Napoleão. Trigonometria. Geometria plana. Arcos Capazes. Demonstrações.

### Abstract

Trigonometry is a powerful calculation resource that allows us to determine inaccessible distances, both in mathematics and in the study of physical phenomena, as well as geometry, which is extremely important for the development of visual reasoning and facilitates interdisciplinarity between different topics. The present work approaches notions of trigonometry and plane geometry that will give theoretical foundation to the demonstrations of Napoleon's Theorem. In the first chapter, results of plane geometry are discussed. In the second chapter, trigonometry results are discussed. In the third chapter, the proofs of the main theorem are presented, focusing on its proofs by trigonometry, by plane geometry and by capable arcs.

**Keywords/Palabras clave:** Napoleon's Theorem. Trigonometry. Plane geometry. Capable arcs. Demonstrations.

ANA CAROLINA COCATO TOLEDO ADRIANO

**Teorema de Napoleão e suas demonstrações**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus de Caraguatatuba para obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dalton Couto Silva.

Caraguatatuba

2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
Serviço de Biblioteca e Documentação do IFSP Câmpus Caraguatatuba

A243t Adriano, Ana Carolina Cocato Toledo  
Teorema de Napoleão e suas demonstrações. / Ana Carolina  
Cocato Toledo Adriano. – Caraguatatuba, 2022.  
23 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Dalton Couto da Silva.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em  
Matemática) – Instituto Federal de São Paulo, Caraguatatuba,  
2022.

1. Matemática. 2. Trigonometria. 3. Geometria plana. 4. Arcos  
capazes. 5. Demonstrações. I. Silva, Dalton Couto da, orient. II.  
Instituto Federal de São Paulo. III. Título.

CDD: 510

Ficha catalográfica elaborada por Elis Regina Alves dos Santos  
Bibliotecária - CRB 8/8099



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO  
CÂMPUS CARAGUATATUBA  
FUC COORD CURSO SUP LICENC MATEMATICA

OFÍCIO N.º 13/2022 - CMAT-CAR/DAE-CAR/DRG/CAR/IFSP

Nome: ADRIANO, Ana Carolina Cocato Toledo

Título: Teorema de Napoleão e suas demonstrações

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado de São Paulo, câmpus Caraguatatuba para a obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática.

Aprovado em: 8, Fevereiro de 2022

Banca Examinadora

Prof(a). Dalton Couto Silva

Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovada

Prof(a). Regina Thaise Ferreira Bento

Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovada

Prof(a). Ângela Maria dos Santos

Instituto Federal de São Paulo – Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovada

Documento assinado eletronicamente por:

- Dalton Couto Silva, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 09/02/2022 14:09:47.
- Angela Maria dos Santos, PROF ENS BAS TEC TECNOLOGICO-SUBSTITUTO, em 10/02/2022 08:49:34.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 09/02/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifsp.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 293966

Código de Autenticação: 9d1e405681



OFÍCIO N.º 13/2022 - CMAT-CAR/DAE-CAR/DRG/CAR/IFSP

AVENIDA BAHIA, 1739, INDAIÁ, CARAGUATATUBA / SP, CEP 11665-071

*À minha amada família e principalmente aos meus avôs, José Carlos Cocato (in memoriam) e Nelson de Toledo Adriano (in memoriam), que me ensinaram que a despedida não é o fim, pelo contrário, é o começo de uma nova aventura.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus e aos meus mentores espirituais pelo dom da vida e por terem me proporcionado chegar até aqui, me conduzindo ao entendimento, à solução e à aceitação de determinados problemas.

À minha família por toda dedicação e paciência me mostrando que somos como um barco no mar tempestuoso, quando todos remam juntos, com amor e cooperação, sempre chegamos ao cais da felicidade.

Agradeço aos professores que sempre estiveram dispostos a ajudar e contribuir para um melhor aprendizado em especial aos professores Ms. Luís Américo Monteiro Junior e Ms. Rafael Nogueira Luz pelo apoio e incentivos durante todo o caminho percorrido e a professora Dra. Ângela Maria dos Santos que nos ensinou que um bom professor é paciente, gentil e atencioso.

Ao meu orientador, professor Dr. Dalton Couto Silva, pela oportunidade, pelo carinho, pela confiança depositada na minha proposta e pelo apoio durante todo esse tempo de pesquisa ao qual nos dedicamos. Obrigada por me manter motivada durante todo o processo.

Amigos são irmãos que escolhemos com o coração, agradeço especialmente a Thais Viera Costa, Reinaldo Gregório Gomes, Thais Rocha Nobre, Bárbara Gomes Tosta e Paulo José Barreto que me apoiaram incansavelmente durante toda minha trajetória, alegrando meus dias, dando bons conselhos e chamando a atenção quando necessário.

Aos meus amigos e companheiros de trabalhos, que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

## SUMÁRIO

<b>Introdução</b> .....	<b>05</b>
<b>Capítulo 1: Noções de Geometria Plana</b> .....	<b>06</b>
<b>1.1. Ângulos na circunferência</b> .....	<b>06</b>
<b>1.1.1 Ângulo central</b> .....	<b>06</b>
<b>1.1.2 Ângulo inscrito</b> .....	<b>07</b>
<b>1.2 Pontos notáveis do triângulo</b> .....	<b>08</b>
<b>1.2.1 Coincidência dos pontos notáveis num triângulo equilátero</b> .....	<b>10</b>
<b>1.3 Semelhança de triângulos</b> .....	<b>11</b>
<b>Capítulo 2: Noções de Trigonometria</b> .....	<b>11</b>
<b>2.1. Relações Fundamentais da Trigonometria</b> .....	<b>11</b>
<b>2.2. Lei dos Senos</b> .....	<b>12</b>
<b>2.3. Lei dos Cossenos</b> .....	<b>13</b>
<b>2.4. Fórmula de Heron</b> .....	<b>14</b>
<b>Capítulo 3: Demonstrações do Teorema de Napoleão</b> .....	<b>15</b>
<b>Demonstração 3.1.</b> .....	<b>16</b>
<b>Demonstração 3.2.</b> .....	<b>18</b>
<b>Demonstração 3.3.</b> .....	<b>20</b>
<b>Considerações finais</b> .....	<b>22</b>
<b>Referências</b> .....	<b>23</b>

## **Introdução**

Medir distâncias é uma necessidade antiga da humanidade, e através do estudo da trigonometria, palavra formada por três radicais gregos tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir), podemos calcular as medidas dos lados e ângulos de um triângulo e determinar espaços inacessíveis. Já a geometria, formada por dois radicais gregos, geo (terra) e metria (medida), revolucionou o saber tornando-se indispensável para a realização de grandes feitos nas áreas da construção e na divisão de terras.

Há 215 anos, Napoleão Bonaparte decretou o bloqueio continental para obrigar os países administrados pelo império francês a cortar todos os laços comerciais com a Inglaterra. Bonaparte queria de todas as formas derrubar a hegemonia econômica do império britânico. Se o decreto de Napoleão é bem conhecido, talvez não o seja pelo fato de ele, além de grande estrategista, ser um entusiasta da matemática, em especial da geometria.

Relata-se que as aptidões matemáticas de Napoleão eram muito precoces, segundo Cronin (2013, p. 22).

Um dia, aos oito anos de idade, saiu com um fazendeiro local para inspecionar um moinho. Como o fazendeiro lhe ensinou quanto milho o moinho moeria em uma hora, ele calculou as quantidades moídas em um dia e em uma semana. Também calculou o volume de água necessária para ativar as mós.

E que ele teria descoberto um interessante teorema da Geometria Euclidiana. “Embora Napoleão Bonaparte seja um famoso militar e conquistador, sua relação com o teorema que leva seu nome ainda é pouco conhecida ou discutida.” (GONZAGA, 2015, p. 1).

O teorema consiste em projetar um triângulo equilátero sobre cada lado de um triângulo qualquer e marcando o baricentro ou ortocentro de cada triângulo projetado e unindo tais pontos, sempre se obterá um novo triângulo equilátero.

As demonstrações desse teorema certamente consistem em um desafio simples, por ter enunciado descomplicado e perspectivas variadas de representações visuais. O presente trabalho aborda o teorema de Napoleão enfocando sua relação com outras áreas do conhecimento matemático como a trigonometria, geometria e suas demonstrações. Com o objetivo de apresentar uma estrutura metodológica coesa, o texto foi dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo, são abordadas noções de geometria plana que fundamentam as demonstrações e suas propriedades.

No segundo capítulo, são abordadas noções de trigonometria que fundamentam as demonstrações e suas propriedades.

No terceiro capítulo, são apresentadas as demonstrações por geometria plana, por trigonometria e por arcos capazes.

## Capítulo 1: Noções de Geometria Plana

As formas geométricas são elementos do nosso cotidiano e estabelecem algumas relações com os espaços em que vivemos. A geometria vai além do cálculo de áreas e volumes, como por exemplo: o sistema de coordenadas utilizados em GPS e sistemas de navegação, outro exemplo se dá na composição dos ladrilhos em nossas casas, que são compostos por formas geométricas planas distintas. Este simples exemplo, além de explicitar a utilidade da geometria plana em nosso dia a dia, também pode nos levar a problemas matemáticos mais sérios, como as possibilidades de ladrilhar uma determinada região utilizando apenas polígonos regulares, ou ainda nos levar a possíveis aplicações em sala de aula. Identificar formas geométricas e relacioná-las é um exercício mental que fazemos intuitivamente, mesmo sem saber conceitos específicos de figuras planas ou espaciais.

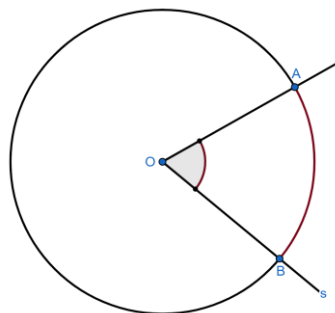
Neste capítulo abordaremos os ângulos na circunferência, pontos notáveis do triângulo e os casos de semelhança de triângulos que darão base e fundamentação teórica às demonstrações principais abordadas neste trabalho.

### 1.1. Ângulos na circunferência

Nesta seção vamos definir ângulo central, ângulo inscrito, medida do ângulo inscrito, ângulos inscritos numa circunferência subtendidos a um mesmo arco e subtendidos a um diâmetro e tais resultados e definições foram retirados de Dolce (2013, cap. XI).

#### 1.1.1. Ângulo central

**Definição 1.1.1.** Um ângulo central relativo a uma circunferência é um ângulo que tem vértice no centro da circunferência.

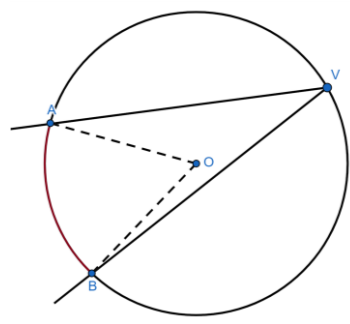


**Figura 1:** Ângulo Central

Fonte: Autor

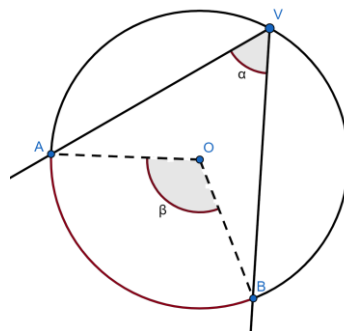
### 1.1.2. Ângulo inscrito

**Definição 1.1.2.** Um ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.



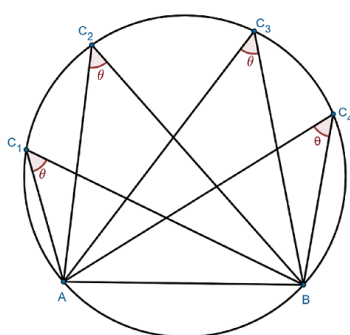
**Figura 2** Ângulo inscrito  
Fonte: Autor

**Teorema 1.1.2.** Um ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente ou a medida de um ângulo inscrito é metade da medida do arco correspondente.



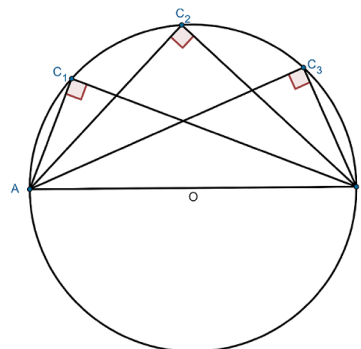
**Figura 3:** Medida do ângulo inscrito  
Fonte: Autor

**Corolário 1.1.2.** Num dado círculo, todos os ângulos inscritos que subtendem a mesma corda são iguais. Em particular, todos os ângulos inscritos que subtendem um diâmetro são retos.



**Figura 4:** Ângulos inscritos numa circunferência subtendidos ao mesmo arco.

Fonte: Autor



**Figura 5:** Ângulos inscritos numa circunferência subtendidos a um diâmetro.

Fonte: Autor

## 1.2. Pontos notáveis do triângulo

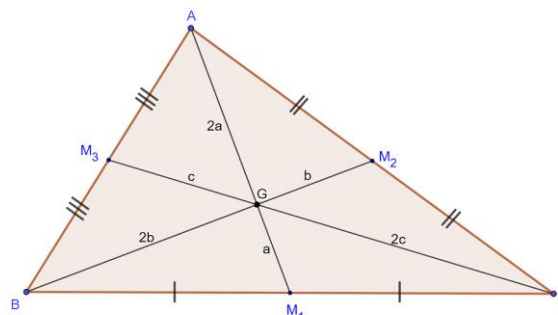
Nesta subseção serão apresentados os pontos notáveis de um triângulo, expondo alguns conceitos e propriedades que foram retirados de Dolce (2013, cap. VIII) e a demonstração da coincidência dos pontos notáveis num triângulo equilátero.

**Definição 1.2.1.** Ponto médio é o ponto que divide um segmento exatamente ao meio, obtendo dois segmentos iguais.

**Definição 1.2.2.** Uma mediana em um triângulo é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Observemos que, dada a definição anterior, todo triângulo possui três medianas, mas não é trivial que essas três medianas se encontrem em um único ponto. O próximo resultado vem nos mostrar que isso ocorre em todos os triângulos.

**Teorema 1.2.1.** O ponto de interseção, ponto de encontro ou ponto de concurso das três medianas de um triângulo é o baricentro do triângulo, que divide cada uma das medianas em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

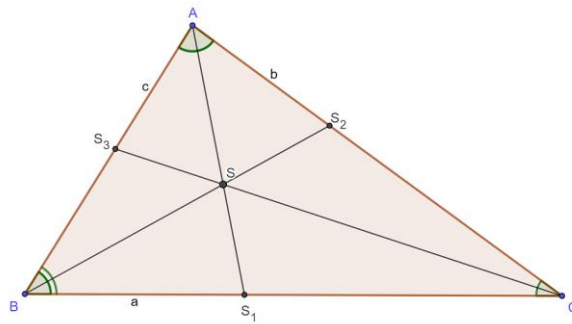


**Figura 6:** Baricentro  
Fonte: Autor

**Definição 1.2.3.** Uma bissetriz interna é um segmento que liga um vértice do triângulo ao seu lado oposto, dividindo o ângulo associado a esse vértice ao meio.

Observe que, dada a definição anterior, todo triângulo possui três bissetrizes. Assim como no caso anterior das medianas, não é imediato que essas três bissetrizes se encontrem em um único ponto. O próximo resultado vem nos mostrar que isso ocorre em todos os triângulos.

**Teorema 1.2.2.** O ponto de interseção, ponto de encontro ou ponto de concurso das três bissetrizes internas de um triângulo é o incentro do triângulo.



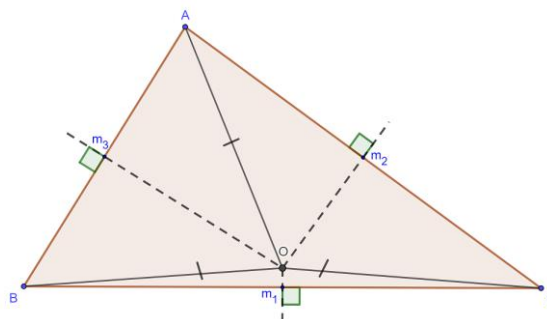
**Figura 7:** Incentro

Fonte: Autor

**Definição 1.2.4.** Mediatriz é uma reta que passa pelo ponto médio de um segmento, formando um ângulo reto.

Observe que, dada a definição anterior, todo triângulo possui três mediatrizes. Assim como nos casos anteriores, o próximo resultado vem nos mostrar que as três mediatrizes se encontram em um único ponto e isso ocorre em todos os triângulos.

**Teorema 1.2.3.** O ponto de interseção, ponto de encontro ou ponto de concurso das mediatrizes dos lados de um triângulo é o circuncentro do triângulo.



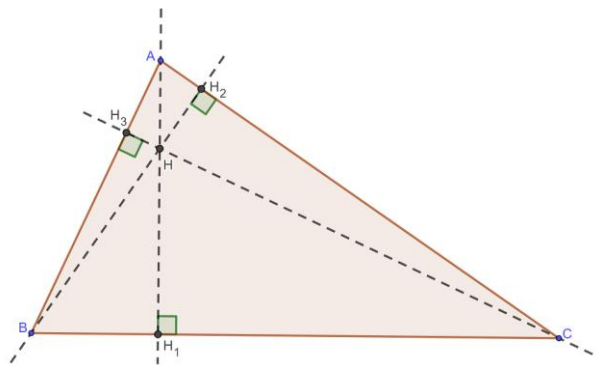
**Figura 8:** Circuncentro

Fonte: Autor

**Definição 1.2.5.** Altura de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto.

Observe que, dada a definição anterior, todo triângulo possui três alturas. Assim como nos casos anteriores, o próximo resultado vem nos mostrar que as três alturas se encontram em um único ponto e isso ocorre em todos os triângulos.

**Teorema 1.2.4.** O ponto de interseção, ponto de encontro ou ponto de concurso das retas suportes das alturas de um triângulo é o ortocentro do triângulo.

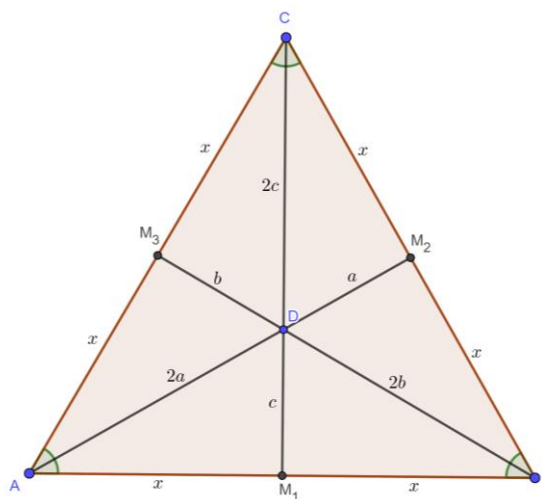


**Figura 9:** Ortocentro

Fonte: Autor

### 1.2.1. Coincidência dos pontos notáveis num triângulo equilátero

Nesta breve seção, vamos provar que, em um triângulo equilátero todos os pontos notáveis vistos anteriormente são coincidentes. Como os triângulos interno e externo de Napoleão (cuja definição está no Capítulo 3) envolvem triângulos equiláteros, esse resultado será fundamental em algumas das demonstrações do Teorema de Napoleão. A demonstração se baseará na Figura 10 a seguir:



**Figura 10:** Pontos notáveis

Fonte: Autor

Seja  $ABC$  um triângulo equilátero e  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  seus pontos médios. Sabemos que  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$  e  $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ . Tracemos as perpendiculares a  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$  pelos vértices  $C$ ,  $A$  e  $B$  que intersectam os pontos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ . Observemos que dada as definições dos pontos notáveis, podemos chamar essas perpendiculares construídas de alturas, medianas, mediatrizes e bissetrizes, logo, podemos dizer que  $\overline{AM_2} = \overline{BM_3} = \overline{CM_1}$ . Sabemos também que o ponto de encontro desses segmentos são respectivamente o ortocentro,

baricentro, circuncentro e incentro. Portanto, o ponto D que é ponto de intersecção dos segmentos  $\overline{AM_2}$ ,  $\overline{BM_3}$  e  $\overline{CM_1}$  é o ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro do triângulo equilátero.

### 1.3. Semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes na geometria plana se for possível determinar uma correspondência entre seus vértices e lados. Para assegurar tal semelhança não é necessário conhecer todos os vértices e lados do triângulo, para isso, utilizamos os critérios de semelhança descritos a seguir. Adotaremos os critérios de semelhança em forma de lema por terem suas demonstrações conhecidas e tais resultados foram retirados de Dolce (2013, cap. XIII).

**Definição 1.3.1.** Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

**Lema 1.3.1.** 1º Critério de semelhança: Caso AA

Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

**Lema 1.3.2.** 2º Critério de semelhança: Caso LAL

Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

**Lema 1.3.3.** 3º Critério de semelhança: Caso LLL

Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

## Capítulo 2: Noções de Trigonometria

A trigonometria é uma área da matemática encarregada de estudar as relações ocorridas entre os lados e os ângulos dos triângulos e é usada atualmente em diferentes áreas de estudo, desde teoria musical a navegação de satélite.

Neste capítulo abordaremos as relações fundamentais da trigonometria, como a lei dos senos, a lei dos cossenos e a fórmula de Heron que darão base e fundamentação teórica às demonstrações principais abordadas neste trabalho.

### 2.1. Relações Fundamentais da Trigonometria

As relações fundamentais da trigonometria, assim como as relações decorrentes, são

importantes na resolução de equações e identidades trigonométricas. Neste trabalho, vamos assumir que o leitor está habituado com as funções  $\text{sen}(x)$  e  $\text{cos}(x)$ .

A partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo, definem-se as funções trigonométricas do seno e cosseno e em decorrência destas, surgem as primeiras relações fundamentais da trigonometria. A prova dessas relações pode ser feita a partir de análises e aplicações do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo.

No que segue serão enunciados alguns resultados em forma de lema sem demonstrações por serem suas provas conhecidas e tais resultados foram retirados de Iezzi (2013, cap. V).

**Lema 2.1.1.** Para todo  $x$  real,  $x \in [0, 2\pi]$  e  $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ , vale a relação:  $\text{tang}x = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x}$

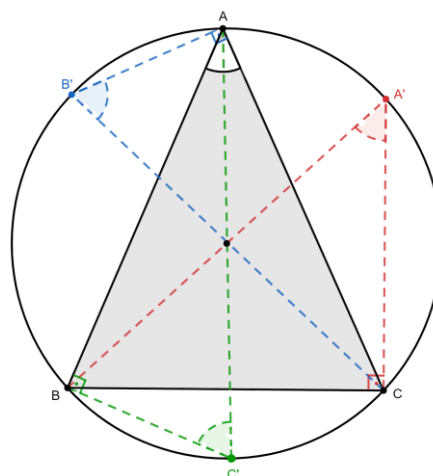
**Lema 2.1.2** Para todo  $x$  real,  $x \in [0, 2\pi]$ , vale a relação:  $\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1$

## 2.2. Lei dos Senos

A Lei dos Senos determina que, num triângulo qualquer, a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto será sempre constante.

Antes de enunciarmos o teorema, é importante ressaltar que uma circunferência é circunscrita a um triângulo quando passa por todos os vértices desse polígono e que o contém completamente em seu interior.

**Teorema 2.2.1.** “Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do seu ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.” (IEZZI, 2013, p. 229)



**Figura 11:** Lei dos Senos

Fonte: Autor

**Demonstração 2.2.1.** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer, como na figura acima, inscrito numa

circunferência de raio  $R$ . Pelo vértice  $B$  do triângulo  $ABC$ , tracemos o diâmetro correspondente  $\overline{BA'}$  e liguemos  $A'$  com  $C$ . Por estarem determinados na mesma corda  $\overline{BC}$  na circunferência, sabemos que  $\hat{A} = \hat{A'}$ , logo o triângulo  $A'BC$  é retângulo em  $C$  por estar inscrito numa semicircunferência. Sendo  $a = BC$ ,  $b = AC$  e  $c = AB$ , então:

$$a = 2R \cdot \text{sen}\hat{A'} \rightarrow a = 2R \cdot \text{sen}\hat{A} \rightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen}\hat{A}}$$

Fazendo uma construção análoga aos pontos  $B'$  e  $C'$  como demonstrado no ponto  $A'$ , temos que:

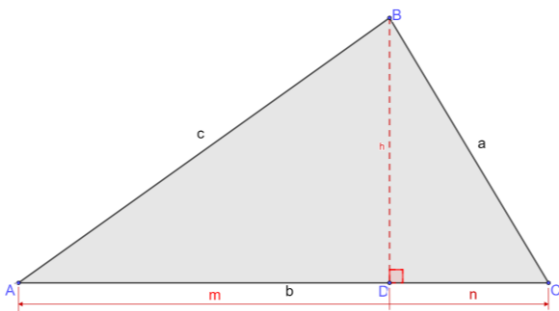
$$2R = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \text{ e } 2R = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}.$$

$$\text{Portanto: } 2R = \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}.$$

### 2.3. Lei dos Cossenos

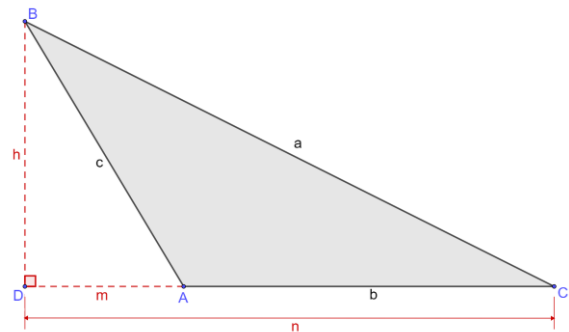
A Lei dos Cossenos é utilizada para calcular a medida de um lado ou de um ângulo desconhecido de um triângulo qualquer, conhecendo suas outras medidas. Assim, pela lei dos cossenos temos as três relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

**Teorema 2.3.1.** Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



**Figura 12:** Lei dos cossenos:  $A < 90^\circ$

Fonte: Autor



**Figura 13:** Lei dos cossenos  $90^\circ < A < 180^\circ$

Fonte: Autor

**Demonstração 2.3.1.** Primeiramente, seja  $ABC$  um triângulo com  $A < 90^\circ$  como segue na figura 11. Observemos o  $\triangle BCD$  que é retângulo, utilizando o teorema de Pitágoras\* podemos relacionar as medidas dos lados do  $\triangle BCD$ , assim obtemos que: (i)  $a^2 = n^2 + h^2$ . Agora observemos o  $\triangle BAD$  que é retângulo, utilizando o teorema de Pitágoras podemos relacionar as medidas dos lados do  $\triangle BAD$ , assim obtemos que: (ii)  $h^2 = c^2 - m^2$ . Seja  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AD} = m$ , temos que: (iii)  $n = b - m$ . Substituindo algebricamente as equações (iii) e (ii) em (i) temos

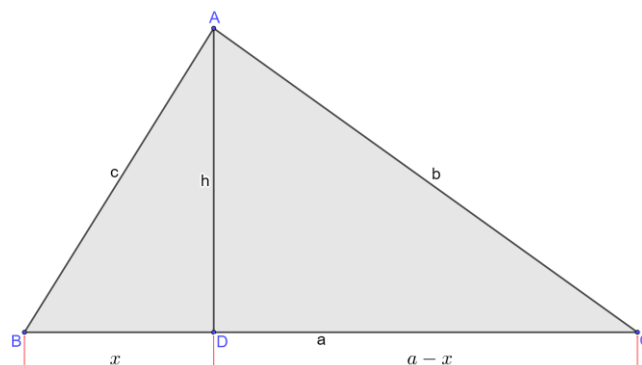
que:  $a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$ . No  $\triangle BAD$  temos que:  $m = c \cdot \cos \hat{A}$ . Logo:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$ .

**Demonstração 2.3.2.** Primeiramente, seja  $ABC$  um triângulo com  $90^\circ < A < 180^\circ$  como segue na figura 12. Observemos o  $\triangle BCD$  que é retângulo, utilizando o teorema de Pitágoras podemos relacionar as medidas dos lados do  $\triangle BCD$ , assim obtemos que: (i)  $a^2 = n^2 + h^2$ . Agora observemos o  $\triangle BAD$  que é retângulo, utilizando o teorema de Pitágoras podemos relacionar as medidas dos lados do  $\triangle BAD$ , assim obtemos que: (ii)  $h^2 = c^2 - m^2$ . Seja  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AD} = m$ , temos que: (iii)  $n = b + m$ . Substituindo algebricamente as equações (iii) e (ii) em (i) temos que:  $a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$ . No  $\triangle BAD$  temos que:  $m = c \cdot \cos (180^\circ - \hat{A})$ . Logo:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$ . Fazendo uma construção análoga, podemos provar que:  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$  e  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$ .

## 2.4. Fórmula de Heron

A fórmula de Heron é um resultado útil nos casos em que não sabemos a altura do triângulo, mas temos a medida dos lados, com ela é possível calcular a área de um triângulo em função das medidas dos seus três lados. Trazemos a demonstração desse resultado pela sua elegância e praticidade.

**Teorema 2.4.1.** Se um triângulo possui os lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$  e o seu perímetro é indicado por  $2p = a + b + c$ , então a área da região triangular é dada por  $A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ .



**Figura 14:** Fórmula de Heron

Fonte: Autor

**Demonstração 2.4.1.** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer como segue na figura 13,  $A_t$  a sua área e  $h$  a medida da altura do triângulo relativa ao vértice  $\hat{A}$ . Observemos que a altura divide o lado

oposto ao vértice  $\hat{A}$  em dois seguimentos,  $\overline{BD}$  e  $\overline{DC}$  cujas medidas são respectivamente  $x$  e  $a - x$ . Observemos o  $\triangle ADC$  que é retângulo, utilizando o teorema de Pitágoras podemos relacionar as medidas dos lados do  $\triangle ADC$ , assim obtemos que:  $b^2 = h^2 + (a - x)^2 \rightarrow b^2 = h^2 + a^2 - 2ax + x^2$  (i). Observemos o  $\triangle ADB$  que é retângulo, utilizando o teorema de Pitágoras podemos relacionar as medidas dos lados do  $\triangle ADB$ , assim obtemos que:  $x^2 = c^2 - h^2$  (ii) e  $x = \sqrt{c^2 - h^2}$  (iii). Como  $x > 0$ , substituindo algebricamente as equações (iii) e (ii) em (i) temos que:  $b^2 = h^2 + a^2 - 2a\sqrt{c^2 - h^2} + c^2 - h^2 \rightarrow h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2$  (iv). Como a área do triângulo é  $A_t = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$  logo,  $(A_t)^2 = \frac{a^2 \cdot h^2}{2}$  (v). Substituindo algebricamente a equação (iv)

$$\text{em (v) temos que: } (A_t)^2 = \frac{a^2 \cdot \left(c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2\right)}{4} \rightarrow (A_t)^2 = \frac{(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{16} \text{ (vi).}$$

$$\text{Consideremos } z = 2ac \text{ e } y = a^2 + c^2 - b^2. \text{ Substituindo em (vi) obtemos: } (A_t)^2 = \frac{(z^2 - y^2)}{16} \rightarrow (A_t)^2 = \frac{(z+y)(z-y)}{16}.$$

$$\text{Portanto, } (A_t)^2 = \frac{\left(\frac{z}{2ac} + \frac{y}{a^2 + c^2 - b^2}\right)\left(\frac{z}{2ac} - \frac{y}{a^2 + c^2 - b^2}\right)}{16} \rightarrow (A_t)^2 = \frac{((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2)}{16} \text{ (vii).}$$

$$\text{Agora, consideremos } s = a + c \text{ e } k = a - c. \text{ Substituindo em (vii) obtemos: } (A_t)^2 = \frac{(s^2 - b^2)(b^2 - k^2)}{16} \rightarrow (A_t)^2 = \frac{(s+b)(s-b)(b+k)(b-k)}{16} \text{ e, dessa forma, } (A_t)^2 = \frac{\left(\frac{s}{a+c} + b\right)\left(\frac{s}{a+c} - a\right)\left(\frac{k}{b+a-c} + b\right)\left(\frac{k}{b+a-c} - b\right)}{16} \rightarrow (A_t)^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+a-c}{2} \cdot \frac{b-a+c}{2} \text{ (viii), notemos que, se } p = \frac{a+b+c}{2}, \text{ então;}$$

$$\begin{aligned} \frac{b - a + c}{2} &= \frac{b + c - a + (a - a)}{2} = \frac{b + c + a - 2a}{2} = \frac{b + c + a}{2} - \frac{2a}{2} = p - a \\ \frac{b + a - c}{2} &= \frac{a + b - c + (c - c)}{2} = \frac{a + b + c - 2c}{2} = \frac{a + b + c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c \\ \frac{a + c - b}{2} &= \frac{a - b + c + (b - b)}{2} = \frac{a + c + b - 2b}{2} = \frac{a + c + b}{2} - \frac{2b}{2} = p - b \end{aligned}$$

Com isso, segue de (viii) que:  $(A_t)^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$ . Como  $A_t$  é uma área, então  $A_t > 0$  logo, obtemos a fórmula de Heron:  $A_t = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ .

### Capítulo 3: Demonstrações do Teorema de Napoleão

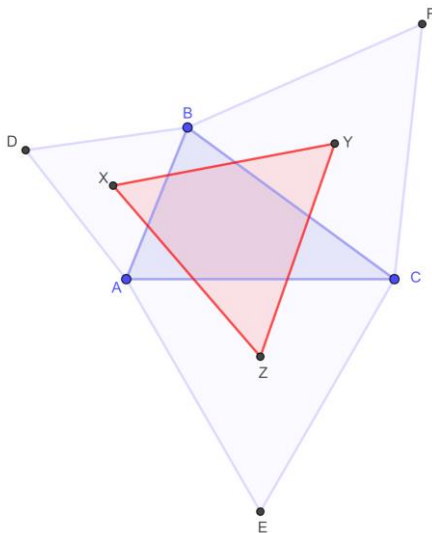
Tendo revisado alguns conceitos da trigonometria e da geometria plana, vamos colocá-los em prática nesse capítulo, apresentando três demonstrações para o Teorema de Napoleão

que se utilizam de técnicas distintas; na primeira demonstração utilizaremos conceitos da trigonometria; na segunda utilizaremos conceitos da geometria plana; por fim faremos uma demonstração construtiva utilizando arcos capazes.

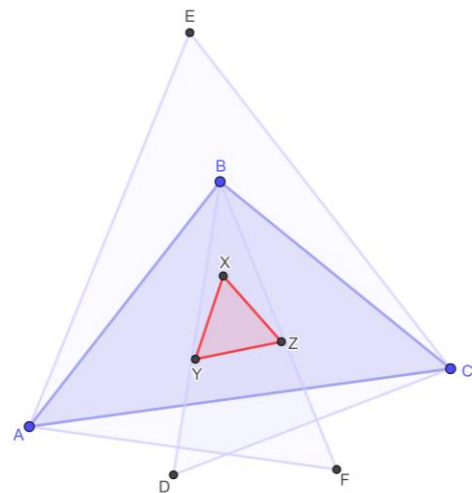
Para Gonzaga (2015, p.31),

As diversas demonstrações, propriedades e conhecimentos associados ao teorema de Napoleão compõem uma gama de técnicas que abrangem diversas áreas da Matemática. É justamente essa diversidade que faz renover a vitalidade ao teorema.

**Definição 3.1.** Dado um triângulo  $ABC$  qualquer, sejam os triângulos equiláteros formados externamente ou internamente sobre cada um de seus lados. Temos que, unindo os baricentros dos triângulos equiláteros formados externamente, temos um novo triângulo, chamado de Triângulo Externo de Napoleão. De forma análoga, unindo os baricentros dos triângulos equiláteros formados internamente, temos um novo triângulo, chamado de Triângulo Interno de Napoleão.



**Figura 15:** Triângulo externo de Napoleão  
Fonte: Autor

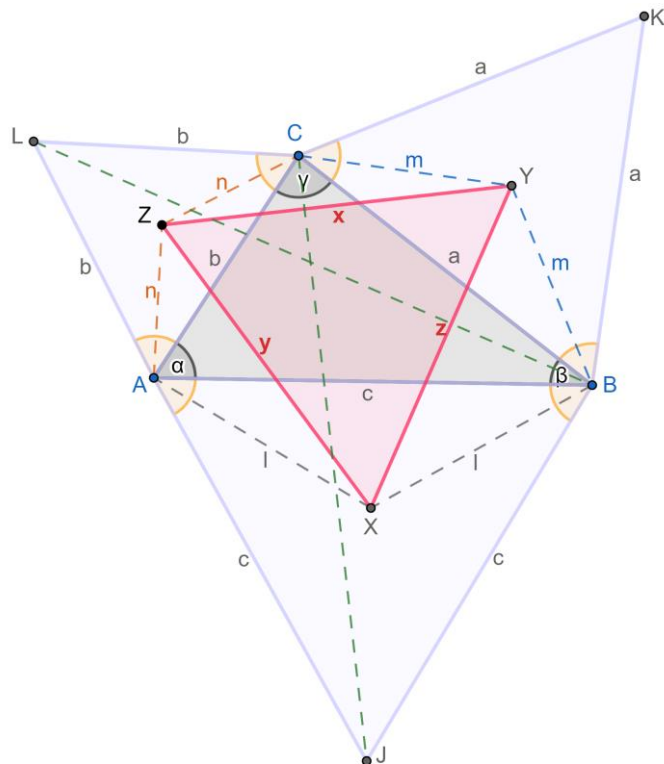


**Figura 16:** Triângulo interno de Napoleão  
Fonte: Autor

### Demonstração 3.1.

**Teorema 3.1.** Dado um triângulo  $\Delta ABC$  qualquer, os triângulos externo e interno de Napoleão construídos sobre  $\Delta ABC$  são equiláteros.

Vamos demonstrar o teorema apenas para o triângulo externo de Napoleão, e vamos nos basear na figura 17 a seguir:



**Figura 17:** Demonstração por trigonometria

Fonte: Autor

Sejam  $X, Y$  e  $Z$  os vértices do triângulo externo de Napoleão e  $l$  a medida dos segmentos  $\overline{AX}$  e  $\overline{XB}$ ,  $m$  a medida dos segmentos  $\overline{CY}$  e  $\overline{YB}$ , e  $n$  a medida dos segmentos  $\overline{CZ}$  e  $\overline{ZA}$ . Como os triângulos  $\Delta AJB$ ,  $\Delta BKC$  e  $\Delta CLA$  são equiláteros e  $X, Y$  e  $Z$  são seus baricentros, temos que:  $X\hat{A}B = Z\hat{C}A = Y\hat{B}C = X\hat{B}A = Y\hat{C}B = Z\hat{A}C = 30^\circ$ .

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $\Delta AXZ$ , temos que: (i)  $y^2 = l^2 + n^2 - 2l \cdot n \cdot \cos(B\hat{A}C + 60^\circ)$ .

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $\Delta BYX$ , temos que: (ii)  $z^2 = m^2 + l^2 - 2m \cdot l \cdot \cos(C\hat{B}A + 60^\circ)$ .

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $\Delta CZY$ , temos que: (iii)  $x^2 = n^2 + m^2 - 2n \cdot m \cdot \cos(A\hat{C}B + 60^\circ)$ .

Num triângulo a distância do baricentro a um de seus vértices é igual a  $\frac{2}{3}$  do comprimento da mediana e no triângulo equilátero o baricentro é também o ortocentro, assim:

$$\text{No triângulo } \Delta ABJ, \text{ temos que: (iv) } l = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c = \frac{c\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{No triângulo } \Delta BCK, \text{ temos que: (v) } m = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

No triângulo  $\Delta CAL$ , temos que: (vi)  $n = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b = \frac{b\sqrt{3}}{3}$ .

Substituindo algebricamente as equações (iv) e (vi) em (i) temos que:  $y^2 = \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{3} \cdot \cos(B\hat{A}C + 60^\circ)$ , logo (vii)  $3y^2 = c^2 + b^2 - 2c \cdot b \cdot \cos(B\hat{A}C + 60^\circ)$ .

Substituindo algebricamente as equações (v) e (iv) em (iii) temos que:  $z^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{3} \cdot \cos(C\hat{B}A + 60^\circ)$ , logo (viii)  $3z^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos(C\hat{B}A + 60^\circ)$ .

Substituindo algebricamente as equações (vi) e (v) em (iii) temos que:  $x^2 = \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \cos(A\hat{C}B + 60^\circ)$ , logo (ix)  $3x^2 = b^2 + a^2 - 2b \cdot a \cdot \cos(A\hat{C}B + 60^\circ)$ .

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos  $\Delta ABL$  e  $\Delta BCL$ , podemos calcular o comprimento do lado  $\overline{BL}$ , assim obtemos que:

No triângulo  $\Delta ABL$ : (x)  $(\overline{BL})^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos(B\hat{A}C + 60^\circ)$ .

No triângulo  $\Delta BCL$ : (xi)  $(\overline{BL})^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(B\hat{A}C + 60^\circ)$ .

Portanto,  $b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos(B\hat{A}C + 60^\circ) = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(B\hat{A}C + 60^\circ)$ .

Analisando a igualdade, observamos que o lado esquerdo é igual ao segundo termo da equação (vii) e o lado direito é igual ao segundo termo da equação (ix). Assim, podemos reescrever a igualdade concluindo que:  $3y^2 = 3x^2 \rightarrow y = x$ .

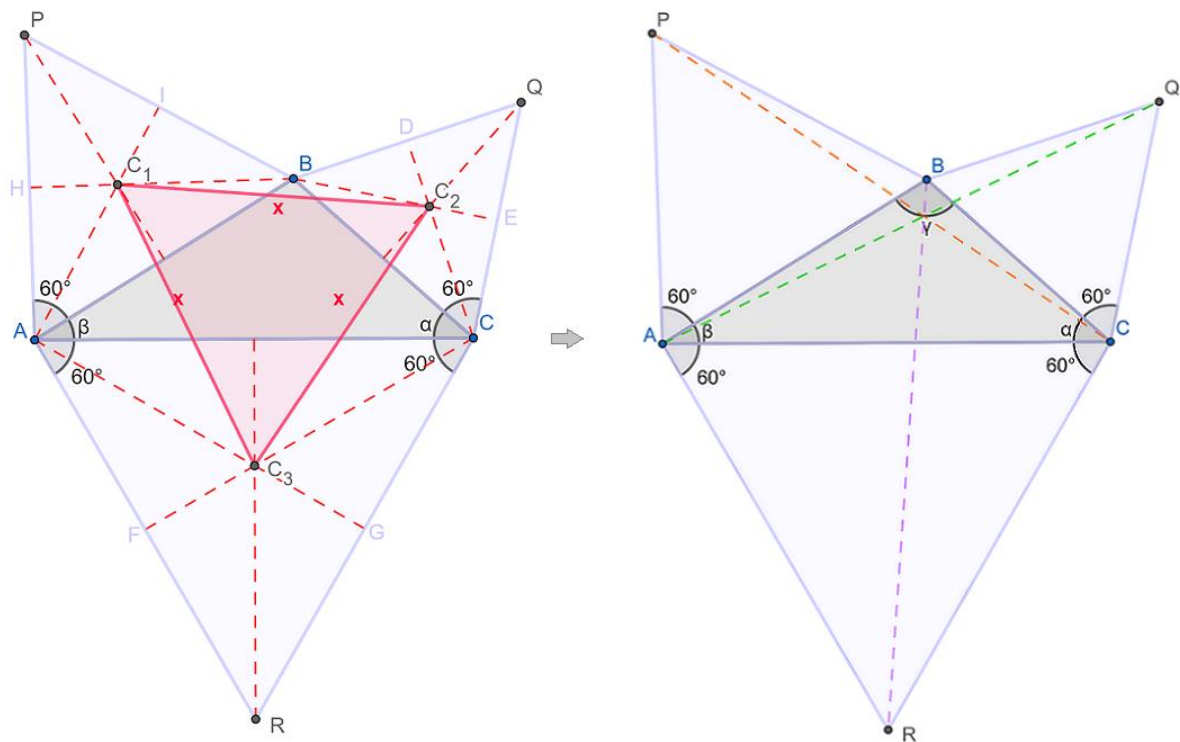
Analisando os triângulos  $\Delta AXZ$  e  $\Delta BYX$  e construindo de forma análoga como nas demonstrações acima, encontraremos a igualdade  $z = y$ . Logo:  $x = y = z$ .

Concluimos então que o  $\Delta XYZ$  é equilátero e provamos assim o Teorema de Napoleão.

### Demonstração 3.2.

**Teorema 3.1.** Dado um triângulo  $\Delta ABC$  qualquer, os triângulos externo e interno de Napoleão construídos sobre  $\Delta ABC$  são equiláteros.

Demonstraremos o teorema apenas para o triângulo externo de Napoleão, e nos basearemos na figura 18 a seguir:



**Figura 18:** Demonstração por geometria plana

Fonte: Autor

Seja  $ABC$  um triângulo qualquer, construiremos em cada lado um triângulo equilátero. Como  $\triangle ABP$ ,  $\triangle ACR$  e  $\triangle BCQ$  são equiláteros temos que:  $\widehat{BCQ}$ ,  $\widehat{CQB}$ ,  $\widehat{QBC}$ ,  $\widehat{ABP}$ ,  $\widehat{BPA}$ ,  $\widehat{PAB}$ ,  $\widehat{CAR}$ ,  $\widehat{ARC}$  e  $\widehat{RCA} = 60^\circ$ . Consideremos os ângulos  $\widehat{ACB} = \alpha$  e  $\widehat{BAC} = \beta$ . Tracemos o segmento  $\overline{BR}$  e observemos o  $\triangle BCR$ . O  $\triangle BCR$  é formado por um lado do  $\triangle BCQ$ , um lado do  $\triangle ACR$  e um ângulo entre eles de  $\alpha + 60^\circ$ . Tracemos o segmento  $\overline{AQ}$  e observemos o  $\triangle ACQ$ . O  $\triangle ACQ$  é formado por um lado do  $\triangle BCQ$ , um lado do  $\triangle ACR$  e um ângulo entre eles de  $\alpha + 60^\circ$ . Pelo caso LAL, os triângulos  $\triangle BCR$  e  $\triangle ACQ$  são semelhantes, e, portanto,  $\overline{BR} = \overline{AQ}$ .

Tracemos o segmento  $\overline{PC}$  e observemos o  $\triangle PAC$ . O  $\triangle PAC$  é formado por um lado do  $\triangle ABP$ , um lado do  $\triangle ACR$  e um ângulo entre eles de  $\beta + 60^\circ$ . Observemos o  $\triangle BAR$ . O  $\triangle BAR$  é formado por um lado do  $\triangle ABP$ , um lado do  $\triangle ACR$  e um ângulo entre eles de  $\beta + 60^\circ$ . Pelo caso LAL, o  $\triangle PAC \cong \triangle BAR$  e, portanto,  $\overline{BR} = \overline{PC} = \overline{AQ}$ .

Pelo resultado apresentado na Demonstração 1.3.1., temos que no  $\triangle$  equilátero, o baricentro, ortocentro e incentro são coincidentes.

Tracemos as três alturas dos  $\triangle ABP$ ,  $\triangle BCQ$  e  $\triangle ACR$ . O ponto em que as alturas se intersectam é chamado de ortocentro. Chamemos o ortocentro dos  $\triangle ABP$ ,  $\triangle BCQ$  e  $\triangle ACR$  respectivamente de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ . Pelo resultado apresentado no teorema 1.2.1., a parte dividida

do segmento que contém o vértice é o dobro da outra parte. Assim, a altura dos  $\Delta$  equiláteros divide o ângulo correspondente ao meio. Assim temos que a altura  $\overline{CD} = 3a$ , logo,  $\overline{CC_2} = 2a$ ,  $\overline{C_2D} = a$  e  $B\hat{C}D = 30^\circ$ . De forma análoga, a altura  $\overline{CF} = 3a$ , logo,  $\overline{CC_3} = 2b$ ,  $C_3F = b$  e  $F\hat{C}A = 30^\circ$ .

Observemos o  $\Delta CC_2C_3$ , temos que  $C_2\hat{C}C_3 = 60^\circ + \alpha$ ,  $\overline{CC_3} = 2b$  e  $\overline{CC_2} = 2a$ . Calculando a altura  $\overline{CD}$  do  $\Delta BCQ$ , temos que:  $3a = \frac{\overline{BC}\sqrt{3}}{2}$ , portanto  $\overline{BC} = 2a\sqrt{3}$ . Calculando a  $\overline{CF}$  do  $\Delta ACR$ , temos que:  $3b = \frac{\overline{CR}\sqrt{3}}{2}$ , portanto  $\overline{CR} = 2b\sqrt{3}$ .

Observemos o  $\Delta BCR$ , temos que  $B\hat{C}R = 60^\circ + \alpha$ ,  $\overline{CR} = 2b\sqrt{3}$  e  $\overline{BC} = 2a\sqrt{3}$ . Pelo caso LAL,  $\Delta C_2CC_3$  e  $\Delta BCR$  são semelhantes. Considerando  $\overline{C_2C_3} = x$ , por semelhança de triângulos, podemos dizer que  $\overline{BR} = x\sqrt{3}$ .

Construindo analogamente em  $\Delta AC_1C_3$  e no  $\Delta ABR$  como no caso anterior, encontramos  $\overline{C_1C_3} = x$ .

Construindo analogamente em  $\Delta BC_1C_3$  e no  $\Delta BCP$  BCP como no caso anterior, encontramos  $\overline{C_1C_2} = x$ .

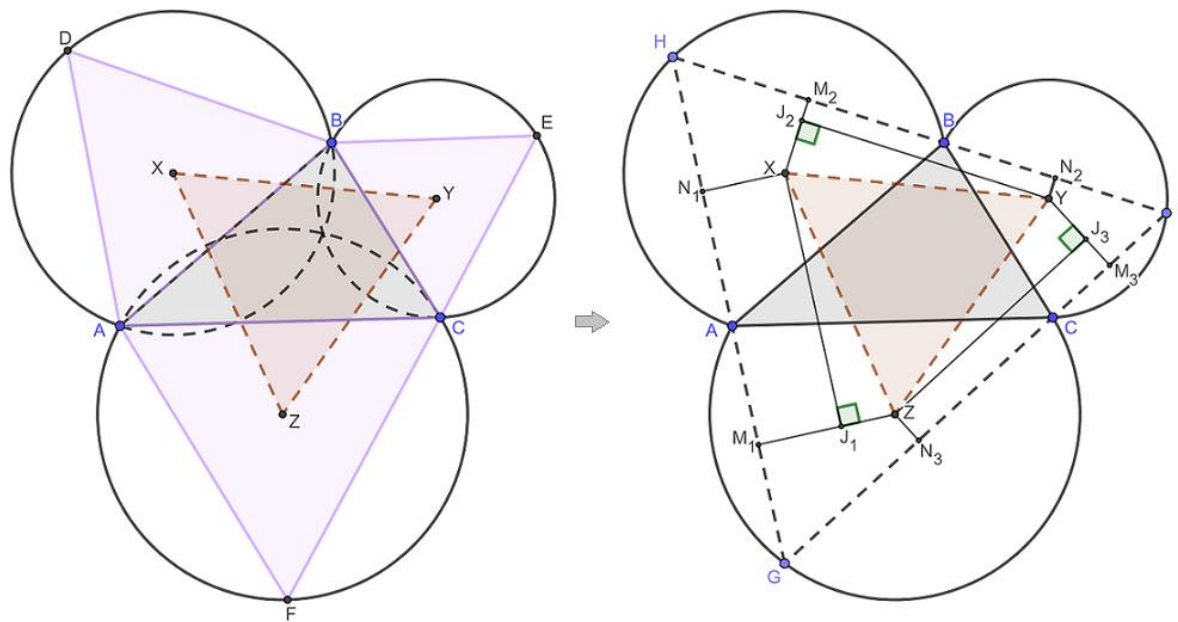
Como  $\overline{C_1C_2} = \overline{C_1C_3} = \overline{C_2C_3}$  provamos o teorema de Napoleão.

### **Demonstração 3.3.**

**Teorema 3.1.** Dado um triângulo  $\Delta ABC$  qualquer, os triângulos externo e interno de Napoleão construídos sobre  $\Delta ABC$  são equiláteros.

Segundo Gonzaga (2015, p. 36), “Essa demonstração foi desenvolvida pelo canadense Ross Honsberger (1929), titular da Universidade de Ontário e autor destacado em Matemática Recreativa”.

Vamos demonstrar o teorema apenas para o triângulo externo de Napoleão, e vamos nos basear na figura 19 a seguir:



**Figura 19:** Demonstração por arcos capazes

Fonte: Autor

Sejam as circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do  $\Delta ABC$ , observemos os arcos  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  que contém os vértices  $D$ ,  $E$  e  $F$  e que pertencem aos círculos de centros  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Tais círculos circunscrevem os  $\Delta ADB$ ,  $\Delta BEC$  e  $\Delta ACF$ .

Tomemos um ponto qualquer  $G$  do arco  $AC$ . Considere a reta que passa pelo segmento  $\overline{AG}$ , ela intersecta o arco  $AB$  em um ponto  $H$ . Os ângulos  $\widehat{AHB}$  e  $\widehat{AGC}$  são inscritos nos mesmos arcos que os ângulos  $\widehat{ADB}$  e  $\widehat{AFC}$ , logo possuem as mesmas medidas em graus que estes. Fica evidente que o encontro das retas  $\overline{BH}$  e  $\overline{GC}$  se dá em um ponto  $I$  tal que o ângulo  $\widehat{GHI}$  meça  $60^\circ$ . Assim o triângulo  $\Delta GHI$  é equilátero.

Como  $\overline{BC}$  é a corda da circunferência de centro  $Y$  cujo arco determina ângulos inscritos de  $60^\circ$ , temos que o ponto  $I$  pertence ao arco  $BC$ . Podemos afirmar que os arcos construídos em torno do  $\Delta ABC$  permitem a construção de um triângulo equilátero que circunscreva o  $\Delta ABC$ , levando em conta que cada lado do  $\Delta ABC$  determina um arco capaz de  $60^\circ$ .

Agora, tracemos perpendiculares a  $\overline{GH}$ ,  $\overline{HI}$  e  $\overline{IG}$  pelos pontos  $Z$ ,  $X$  e  $Y$ . Essas perpendiculares determinam os pontos médios sobre os argumentos do triângulo  $\Delta GHI$  determinados pelos vértices do  $\Delta ABC$ , temos assim:  $M_1$  e  $N_1$  sobre  $\overline{GA}$  e  $\overline{AH}$ ,  $M_2$  e  $N_2$  sobre  $\overline{HB}$  e  $\overline{BI}$  e  $M_3$  e  $N_3$  sobre  $\overline{IC}$  e  $\overline{CG}$ .

Primeiramente, consideraremos os pontos médio  $M_1$  e  $N_1$  e os pontos  $X$  e  $Z$ . Tracemos

por  $X$  uma reta paralela ao segmento  $\overline{GH}$ , ela intersectará o segmento  $\overline{ZM_1}$  em um ponto  $J_1$ , formando o retângulo  $XJ_1M_1N_1$ . Como  $M_1$  e  $N_1$  são pontos médios, temos que:  $\overline{GH} = 2\overline{M_1N_1} = 2\overline{J_1X}$ . Observe que o triângulo  $\Delta XJ_1Z$  é retângulo, com catetos  $\overline{XJ_1}$  e  $\overline{J_1Z}$  e a hipotenusa  $\overline{XZ}$ . Como  $\overline{XJ_1}$  é um cateto do triângulo retângulo  $\Delta XJ_1Z$ , logo, não é maior que a hipotenusa  $\overline{XZ}$ .

Como  $\overline{XJ_1}$  é paralelo a  $\overline{GH}$ , observamos que se  $G$  está muito próximo de  $A$ , o triângulo retângulo  $\Delta XJ_1Z$  é externo ao Triângulo de Napoleão  $XYZ$ , mas se  $G$  está muito próximo de  $C$ , o triângulo retângulo  $\Delta XJ_1Z$  é interno ao Triângulo de Napoleão  $XYZ$ . Assim, concluímos que existe  $G \in \overline{AC}$  tal que o lado  $\overline{XJ_1}$  do triângulo  $\Delta XJ_1Z$  coincide com a hipotenusa  $\overline{XZ}$ , atingindo seu comprimento máximo:  $\overline{XJ_1} = \overline{XZ}$ .

Considerando os pontos médios  $M_2$  e  $N_2$  e o ponto  $Y$ . Tracemos por  $Y$  uma reta paralela ao segmento  $\overline{HI}$ , ela intersectará o segmento  $\overline{XM_2}$  em um ponto  $J_2$ , formando o retângulo  $YJ_2M_2N_2$ . Analogamente, no triângulo  $\Delta XJ_2Y$  temos que o arco  $AB$  possui um ponto  $H$  no qual o cateto  $\overline{YJ_2}$  atinge o seu máximo comprimento, equivalendo a  $\overline{XY}$ .

Considerando os pontos médios  $M_3$  e  $N_3$  e o ponto  $Z$ . Tracemos por  $Z$  uma reta paralela ao segmento  $\overline{IG}$ , ela intersectará o segmento  $\overline{YM_3}$  em um ponto  $J_3$ , formando o retângulo  $ZJ_3M_3N_3$ . Analogamente, no triângulo  $\Delta YJ_3Z$  temos que o arco  $BC$  possui um ponto  $I$  no qual o cateto  $\overline{ZJ_3}$  atinge o seu máximo comprimento, equivalendo a  $\overline{YZ}$ .

Como  $\overline{GH} = 2\overline{XJ_1}$ , o comprimento máximo que  $\overline{GH}$  pode assumir é  $2\overline{XZ}$ . Analogamente, o comprimento máximo que  $\overline{HI}$  e  $\overline{IG}$  podem assumir é  $2\overline{XY}$  e  $2\overline{YZ}$ , respectivamente.

Como o  $\Delta GHI$  é sempre equilátero, seus lados assumem seu comprimento máximo ao mesmo tempo, ou seja,  $2\overline{XZ} = 2\overline{XY} = 2\overline{YZ}$  o que implica que  $\overline{XZ} = \overline{XY} = \overline{YZ}$ . Então o  $\Delta XYZ$  é equilátero.

### Considerações finais

Neste trabalho, procuramos estudar algumas abordagens distintas para o Teorema de Napoleão e demonstrar algumas possibilidades de se trabalhar não só a Geometria Plana e a Trigonometria separadamente, mas sim, ambas juntas, de forma a obter novos resultados e novas interpretações para resultados já conhecidos. Nosso objetivo inicial era detalhar três demonstrações distintas para o Teorema principal, utilizando abordagens diferentes. No decorrer do estudo, a terceira demonstração se tornou um ponto chave da pesquisa, pois nela estão contidos conceitos trigonométricos e geométricos em sintonia, evidenciando a

importância de utilizar diferentes caminhos para resolver um mesmo problema. A utilização dessa diversificação de ideias e conceitos faz com que os campos da Geometria Plana e da Trigonometria se tornem mais interessantes (para o leitor, para o aluno e para o professor).

Optamos por abordar o triângulo externo de Napoleão por permitir uma melhor visualização em função das figuras desenvolvidas. Além da interdisciplinaridade com contextos históricos, existem diversas outras propostas de demonstrações e propriedades provenientes da configuração de Napoleão. Tais propostas utilizam conceitos como a Álgebra Linear, Números Complexos, Geometria Sintética, Transformações do Plano, entre outros que permitem as possíveis continuações deste trabalho.

## Referências

CRONIN, V. **Napoleão: uma vida**, 1º ed. Barueri-SP, Amarulys Editora, 2013.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. 9ª ed. São Paulo: Saraiva Didáticos, 2013.

GONZAGA, Gean Carlos Sousa. **Teorema de Napoleão: Origem, demonstrações e aplicações**. 2015. 1 recurso online (84 p.) Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiás – GO. Disponível em: <<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/4916/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Gean%20Carlos%20Sousa%20Gonzaga%20-%202015.pdf>>. Acesso em 05/01/2021.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: trigonometria**. 9ª ed. São Paulo: Saraiva Didáticos, 2013.

REIS, G.A.; TSUCHIYA, L. Y.; AUGUSTINI, E. **Complexidade Algébrica em Demonstrações de Geometria Euclidiana Plana: o Teorema de Napoleão e Propriedades**. Revista Científica Eletrônica da Faculdade de Matemática - FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia - UFU - MG, Uberlândia, n. 9, p.231-258, out/2007. Disponível em: <<http://www.pet.famat.ufu.br/sites/pet.famat.ufu.br/files/ArtigoLucianaGabriela2.pdf>> Acesso em 19/10/2021.

RODRIGUES, Rosimeire dos Santos. SABIÃO, Roseline Martins. **A história da matemática e a importância da geometria**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 04, Ed. 06, Vol. 01. pp. 96-110 Jun/2019. ISSN: 2448-0959. Disponível em: <<https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/historia-da-matematica>>. Acesso em 09/03/2021.

SILVA, Denis Apolinário. **Trigonometria e Geometria: Uma abordagem conjunta**. 2014. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Roraima - RR. Disponível em: <[http://www.bdtd.ufr.br/tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=192](http://www.bdtd.ufr.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=192)>. Acesso em 09/05/2021.