INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM OLHAR PARA PESQUISAS CIENTÍFICAS QUE CONTRIBUAM PARA O APRENDIZADO DO QUE É PROPOSTO PELA BNCC

Raquel Guimarães de Medeiros

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pela Prof. Ma. Gabriela Cotrim de Moraes.

IFSP
São Paulo
2021

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

m488p Medeiros, Raquel Guimarães de
Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para pesquisas cientÍficas que contribuam para o aprendizado do que é proposto pela bncc / Raquel Guimarães de Medeiros. São Paulo: [s.n.], 2021.
69 f. il.

Orientadora: Gabriela Cotrim de Moraes

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2021.

1. Álgebra. 2. Pensamento Algébrico. 3. Aritmética. 4. Anos Iniciais do Ensino Fundamental. 5. Base Nacional Comum Curricular. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD

RAQUEL GUIMARÃES DE MEDEIROS

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM OLHAR PARA PESQUISAS CIENTÍFICAS QUE CONTRIBUAM PARA O APRENDIZADO DO QUE É PROPOSTO PELA BNCC

Dissertação de mestrado apresentada em 26 de março de 2021 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Ma. Gabriela Cotrim de Moraes
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientadora e Presidente da Banca

Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Me. Fernando Moreira Barnabé
Associação Nova Escola
Membro da Banca

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
DIRETORIA GERAL/CAMPUS SAO PAULO
Câmpus São Paulo, (11) 2763-7520, Rua Pedro Vicente, 625, CEP 01109-010, São Paulo (SP)

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa da Dissertação intitulada **"Pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental: um olhar para pesquisas científicas que contribuam para o aprendizado do que é proposto pela BNCC"** apresentada pela aluna **Raquel Guimarães de Medeiros (SP1880187)** do Curso **MESTRADO PROFISSIONAL DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT (Câmpus São Paulo)**. Os trabalhos foram iniciados às **10:00** pela Professora presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

Membros	IES	Presença	Aprovação/Conceito *(quando exigido)*
Gabriela Cotrim de Moraes (Orientadora)	IFSP	X	aprovada
Valeria Ostete Jannis Luchetta (Examinadora Interna)	IFSP	X	aprovada
Fernando Moreira Barnabé (Examinador Externo)	Nova Escola/ Mathema	X	aprovada
Rogerio Ferreira da Fonseca (Suplente Interno)			
Elizabete Leopoldina da Silva (Suplente Externo)			

Observações:

Banca à distância, realizada no dia 26/03/2021 às 10hs, utilizando a plataforma digital google meets.
O trabalho foi aprovado, com sugestões de inserções e correções por parte da banca que deverão ser feitas para a versão final do mesmo.

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da monografia, passou à argüição da candidata. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

[X] Aprovado [ ] Reprovado Nota (quando exigido): _________

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

SÃO PAULO / SP, 26/03/2021

Gabriela Cotrim de Moraes

Valeria Ostete Jannis Luchetta

Fernando Barnabé

Fernando Moreira Barnabé

Rogerio Ferreira da Fonseca

Elizabete Leopoldina da Silva

Ao Hector:

Para você o céu, as estrelas e as gotas do oceano.

Vida minha e materialização do amor.

“Um dos fatores que contribuem para que a Matemática seja considerada abstrata reside na forma como a disciplina é ensinada, fazendo-se uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, em vez de partirmos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido, mostrando as perguntas às quais ele responde, tomamos esse conceito como algo pronto”.

Tatiana Roque

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois reconheço que não chegaria aqui sem a força que Ele me deu.

Agradeço ao Emerson, meu esposo, que por este tempo assumiu algumas frentes a mais na vida familiar para que fosse possível eu concluir os estudos e não me deixou desistir.

Agradeço ao meu irmão que sempre me incentivou a estudar e ao meu pai, que mesmo sem compreender às vezes o valor do estudo, me deu todo o amparo que pôde durante a graduação, me possibilitando subir o primeiro degrau.

O início dos estudos acadêmicos para quem vem de família pobre e escola pública não é nada fácil, por esse motivo quero externar um agradecimento especial a todos que de uma maneira ou de outra me auxiliaram no início dessa empreitada, seja pelo pagamento da passagem, seja pela carona, seja pelo empréstimo de livros... Graças a Deus foram muitas as ajudas, por esse motivo não irei citar nomes para não incorrer o risco de esquecer de algum.

Agradeço a todos os colegas com os quais pudemos compor uma turma única na qual sempre um segurou a mão do outro e fez questão de ajudar e aos professores com os quais tivemos o prazer de ter contato nos anos de 2018 e 2019, em especial aos professores Rogério, Henrique e Amari: Aos dois primeiros por nos incentivar a escrever um capítulo do trabalho na disciplina História da Matemática. Nossa! Como isso ajudou! E a todos os direcionamentos dados pelos dois últimos (sim ao Henrique novamente) na disciplina TCC, foi a nossa primeira orientação e fez toda a diferença.

Agradeço a Gabi, Professora e Mestre, que compreendeu um momento único que vivenciei com a chegada do meu bebê no qual o trabalho ficou praticamente pausado durante cerca de um ano e teve muita paciência comigo ao longo deste tempo se aproximando de uma especificidade da área da Álgebra que não era de seu domínio – o ensino nos anos iniciais do fundamental – e me orientou na escrita deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo elencar proposições a partir de autores escolhidos com relação ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico que contribuam para efetivação das indicações propostas na BNCC para a Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental. Nesta perspectiva traz, a partir de um levantamento bibliográfico, considerações acerca de marcos históricos e pesquisas científicas com relação ao Pensamento Algébrico. Indicando que o trabalho proposto para a Álgebra neste período escolar requer um novo olhar para a metodologia de maneira que esta enfatize a resolução de problemas voltados para padrões e relações, o uso de estratégias pessoais, o compartilhamento e a sistematização de generalizações.

Palavras-chaves: Álgebra, Pensamento Algébrico, Aritmética, Anos iniciais do ensino fundamental, BNCC.

ABSTRACT

This work aims to list propositions from certain authors regarding the development of Algebraic Thought that contribute to the realization of the indications proposed in the BNCC for Algebra in elementary education. In this perspective, it brings, from a bibliographic survey, considerations about historical landmarks and scientific research in relation to Algebraic Thinking. Indicating that the proposed work for Algebra in elementary education 1 requires a new look at the methodology in such a way that it emphasizes the resolution of problems related to patterns and relationships, the use of personal strategies, the sharing and the systematization of generalizations.

Keywords: Algebra, Algebraic Thinking, Arithmetic, Elementary School, BNCC.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A busca em responder a questão norteadora dessa pesquisa: “Quais indicações das pesquisas científicas a respeito do Pensamento Algébrico contribuem com o trabalho do professor a partir do que é proposto pela BNCC para o ensino de Álgebra nos primeiros anos do ensino fundamental?”, é proveniente da minha atuação na formação de professores tanto na Rede Municipal de Educação de Guarulhos, entre 2016 e 2018, como na Rede Municipal de Educação de São Paulo, a partir de 2019, considerando os estudos sobre o currículo e a recém homologada Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Não obstante, a carreira traçada no magistério dos anos iniciais do ensino fundamental desde 2008 e a trajetória acadêmica sempre relacionada a área da Matemática também contribuíram para o meu interesse sobre o tema.

Para subsidiar o estudo em si recorri à revisão bibliográfica enquanto metodologia, com o intuito de organizar o conteúdo revisado de forma a contribuir de maneira mais efetiva com o trabalho do professor em prol do aprendizado proposto pela BNCC para os anos iniciais do ensino fundamental.

Diante do exposto, o objetivo geral deste trabalho é:

Elencar proposições, a partir de autores escolhidos, com relação ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico, que contribuam para efetivação das indicações propostas na BNCC para a Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental.

Já, os objetivos específicos são:

Conhecer as habilidades propostas na BNCC que abordem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico;

Reconhecer a importância do desenvolvimento do Pensamento Algébrico tendo como base marcos referenciais do desenvolvimento histórico da Álgebra;

Conhecer abordagens dos autores contemporâneos escolhidos sobre o trabalho com o Pensamento Algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental.

Os capítulos desta dissertação foram organizados do seguinte modo:

O Capítulo 1 é dedicado a abordar a perspectiva de Álgebra trazida pela BNCC. Nele é discutida a definição de Pensamento Algébrico e são feitos apontamentos a respeito das habilidades desta unidade temática indicadas pela Base para o estudo nos anos iniciais do ensino fundamental.

O Capítulo 2 é dedicado a compartilhar alguns elementos referentes à história da Álgebra, buscando clarificar a evolução histórica desta unidade temática enquanto respostas às situações problemas que a humanidade encontrou diferentes modos de dar em cada tempo, no intuito de indicar uma abordagem na perspectiva do Pensamento Algébrico.

O Capítulo 3 é dedicado a compartilhar estudos com base nas pesquisas de Ana Paula Canavarro, Bárbara Brizuela e Carolyn Kieran com relação ao Pensamento Algébrico. Neste capítulo, além de trazer pontos de vista que contribuem para o trabalho do professor na perspectiva do Pensamento Algébrico, são partilhados episódios de sala de aula nos quais a postura metodológica dos educadores conduz à apropriação do mesmo pelos estudantes.

As Considerações finais ganham lugar no Capítulo 4, nele são retomadas brevemente as conclusões obtidas ao longo deste estudo e destacados aspectos referentes a uma cultura de sala de aula que favoreçam o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

1. BNCC: O QUE ESTE DOCUMENTO NORMATIVO NOS DIZ A RESPEITO DO ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL?

Para iniciar nossa discussão se fazem necessárias algumas breves explicitações sobre os termos Aritmética e Álgebra.

A Aritmética "é o estudo ou ciência dos números, que considera sua natureza e propriedades, possibilitando meios mais simples para expressá-los, compreendê-los, resolvê-los, que é o que chamamos calcular" (PEANO, 1889), logo, essa unidade temática, já era abordada na estrutura de nosso sistema de numeração e nas operações e propriedades deste.

Existem diferentes definições para a Álgebra, Kaput (2008) fez a escolha de encarar esta unidade por meio de três vertentes, que são:

> 1. O estudo das estruturas e sistemas abstraídos a partir do resultado de operações e estabelecimento de relações, incluindo os que surgem na Aritmética (Álgebra como aritmética generalizada[1]) ou no raciocínio quantitativo;
> 2. O estudo das funções, relações e (co)variação;
> 3. A aplicação de um conjunto de linguagens de modelação, tanto no domínio da Matemática, como no seu exterior.
> (KAPUT, 2008, p.11, adaptado)

Já o *Oxford Languages*, dicionário de português da Google, define a Álgebra como "parte da Matemática elementar que generaliza a Aritmética, introduzindo variáveis que representam os números e simplificando e resolvendo por meio de fórmulas, problemas nos quais as grandezas são representadas por símbolos" (GOOGLE, 2021).

Como leremos a seguir, apesar da Álgebra escolar estar atualmente associada apenas à manipulação de expressões com símbolos, ela também contempla o estudo e a representação das relações que podem ser estabelecidas entre os números:

> A Álgebra escolar tem estado associada à manipulação dos símbolos e à reprodução de regras operatórias, tantas vezes aplicadas mecanicamente e sem compreensão, parecendo os símbolos ter adquirido um estatuto de

[1] Termo que será retomado e explicado na subseção 3.3 do capítulo 3.

> *primazia per si* [...] Em virtude do uso dos símbolos e sistemas simbólicos se ter imposto, a Álgebra passou a ser encarada como o estudo ou uso destes sistemas. No entanto, no cerne do pensamento algébrico estão os significados, está o uso dos símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão. Trata-se de olhar através dos símbolos e não de olhar os símbolos (KAPUT, 2008).

Deste modo entendemos que a Aritmética é trabalhada quando tratamos do nosso sistema de numeração e estudamos sua estrutura, relações, operações e propriedades. Já a Álgebra ganha lugar quando se quer expressar aspectos gerais do nosso sistema de numeração assim como para facilitar a resolução de situações problemas.

Por cerca de 20 anos os documentos norteadores para a elaboração dos currículos foram os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), estes não eram tidos como referências obrigatórias, mas traziam indicações de conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais, além de alguns aspectos teóricos e orientações didáticas acerca de um ou outro tema relevante para o ensino das diferentes disciplinas.

Ao tratar o desenvolvimento histórico do ensino de Matemática, os PCN apontavam que, embora tenha havido convergências no discurso referente a uma metodologia de ensino cujo foco seja o educando, a proposição de conhecimento novo com base em situações problemas desafiadoras e contextualizadas, dentre outros aspectos,

> [...] ainda hoje nota-se, por exemplo, a insistência no trabalho com os conjuntos nas séries iniciais, **o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais**, a formalização precoce de conceitos e a pouca vinculação da Matemática às suas aplicações práticas (BRASIL, 1997, p. 21, ênfase adicionada).

Destacando assim o trabalho com a Álgebra apenas nos anos finais e trazendo críticas com relação ao tempo em que se formaliza os conceitos e à falta de relação da Matemática com algo que faça sentido para o estudante.

Mais adiante, quando o documento propõe os blocos de conteúdo, em "Números e Operações" vemos que:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1997, p. 39).

Ou seja, era colocada a possibilidade de um preparo para a aprendizagem da Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental, no entanto a responsabilidade de tratar esta unidade temática seria dos anos finais. Outro ponto que podemos observar nestes excertos é a definição que se tinha de nosso objeto de estudo, destacando uma "pré-álgebra" e uma Álgebra que modeliza, que serve de amparo para as demonstrações e para resolução de problemas dos quais a Aritmética não "daria conta".

Desde a Constituição de 1988 era apontada a necessidade de haver uma base curricular nacional, como vemos em seu artigo 210 que diz "Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais." Tal necessidade foi reafirmada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDBEN, lei 9394/96, e no Plano Nacional de Educação de 2014, homologado pela lei 13.005 de 2014. Desta maneira, em 2015 a BNCC começou a ser elaborada, sendo em dezembro de 2017 homologadas as partes do documento normativo voltadas para a educação infantil e para o ensino fundamental.

O documento normativo, BNCC, prevê no ensino fundamental para a área de Matemática a exploração de quatro de seus campos: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, e propõe cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. A leitura do tratamento dado à unidade temática de Álgebra clarifica o propósito da Base ao inseri-la nos anos iniciais do ensino fundamental, através do desenvolvimento do Pensamento Algébrico e a seguir detalha o que seria tal pensamento com vistas ao desenvolvimento das seguintes ideias fundamentais da Matemática: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade.

> [...] é imprescindível que **algumas dimensões do trabalho com a Álgebra** estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o ensino fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de **regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade**. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam (BRASIL, 2017, p. 270, ênfase adicionada).

O desenvolvimento do Pensamento Algébrico não é tido pela BNCC como algo dentro da unidade temática Números, mas relacionado a ela, quando sugere o trabalho com sequências numéricas e o estudo do papel de equivalência do sinal de igual. O trabalho com o aspecto funcional da Álgebra é sugerido por meio de resolução de problemas que envolvam a proporção entre duas grandezas:

> A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: “Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?” (BRASIL, 2017, p. 270).

1.1. MAS AFINAL, O QUE É PENSAMENTO ALGÉBRICO?

Ao longo deste estudo serão observados termos como pré-álgebra, álgebra precoce e *early algebra*, pois em alguns momentos, optamos por manter o termo utilizado pelo autor referência para o estudo em questão. O conceito e significado que estes autores dão ao longo de suas abordagens nos fizeram compreender que, apesar de dar nomes diferentes, as ideias em jogo se referem sempre ao que entendemos por Pensamento Algébrico.

O Pensamento Algébrico está relacionado a mais do que uso de símbolos e fórmulas, ele se refere à generalização de padrões existentes em situações problemas reais ou fictícias que corroboram com sua resolução. Assim podemos dizer que o desenvolvimento do Pensamento Algébrico se dá em sala de aula quando

> os alunos se envolvem no processo matemático de generalização tendo por base a observação e análise de dados numéricos, padrões, regularidades ou relações matemáticas e expressam essas generalizações usando recursos diversos que podem passar pela utilização da linguagem natural, diagramas, tabelas, fórmulas ou símbolos matemáticos (EQUIPA DO PFCM DA ESE DE SETÚBAL, 2008/2009).

De acordo com a BNCC (2017), o Pensamento Algébrico está relacionado à identificação de regularidades e padrões de sequências (sejam elas numéricas ou não), assim como à percepção e à expressão de relação de interdependência entre grandezas em contextos significativos.

Canavarro (2007) aborda o Pensamento Algébrico como consequência da capacidade de generalização:

> A iniciação ao Pensamento Algébrico não é sinônimo de antecipação de procedimentos tradicionalmente reproduzidos. Muito pelo contrário, significa conceber o ensino da Álgebra a partir de uma nova perspectiva, mais integrada e interessante, em que as crianças possam desenvolver capacidades matemáticas motivadas por situações ricas e com sentido, que lhes possibilitem a construção de conhecimentos algébricos com compreensão, ampliando o seu patrimônio quer seja no nível de processos ou de produtos matemáticos (CANAVARRO, 2007).

Logo, destaca que o objetivo do desenvolvimento do Pensamento Algébrico está para além da mera antecipação, mas para um olhar com compreensão para tudo o que envolve a Álgebra fazendo com que o trabalho desta unidade não se resuma a manipulação de expressões algébricas.

Tal entendimento é corroborado por autores como Carolyn Kieran:

> Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras

> (e.g. Mason, 2005). Assim, a Álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas (KIERAN, 2007, p. 5).

Brizuela (2006) sintetiza tais ideias afirmando que “a generalização está no coração do Pensamento Algébrico.” De maneira que se pode dizer que pensar algebricamente é reconhecer numa dada situação matemática aquilo que é geral e ser capaz de expressar essa generalização (VERSCHAFF EL; GREER; DE CORTE, 2007).

Desta maneira, com base nos autores referência para o Pensamento Algébrico, entendemos que este termo indica à construção das ideias envolvidas para se chegar às expressões algébricas (uso de simbologia), à síntese para expressar alguma regra ou padrão, às respostas de alguma situação problema, logo a observação de regularidades e relações que podem ser estabelecidas a fim de se chegar a um ponto mais geral.

Convém destacar, de acordo com as contribuições de Ana Paula Canavarro (2007), que o trabalho com o Pensamento Algébrico não requer o uso da linguagem algébrica, de modo que a notação algébrica convencional – uso de símbolos matemáticos – não é o único veículo para expressão de ideias algébricas, dando lugar para outras técnicas como a linguagem natural, pictórica, diagramas e tabelas. Ou seja, o Pensamento Algébrico requer do aprendiz que enxergue através dos símbolos e não apenas os símbolos, que entenda e se aproprie dos significados envolvidos nas situações (KAPUT, 2008).

1.2. HABILIDADES PROPOSTAS PELA BNCC PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Após termos contato com a definição de Pensamento Algébrico e a importância de seu desenvolvimento desde cedo, podem surgir perguntas como: o que de fato está proposto para o trabalho de Álgebra nos anos iniciais? Quais conteúdos devem estar previstos e quais saberes se espera que o estudante dos anos iniciais do ensino fundamental se aproprie?

Para auxiliar nestas respostas podemos olhar para os objetos de conhecimento e habilidades propostos pela BNCC para este período da escolarização (Tabela 1.2). O objeto de conhecimento é o mesmo que o conceito / conteúdo a ser desenvolvido, já a habilidade indica o que se espera que o estudante aprenda com base no respectivo objeto de conhecimento.

Antes de apresentá-los convém esclarecer a sigla adotada por esse documento normativo e trazer alguns apontamentos a respeito da estrutura das habilidades:

Sobre a sigla: Optou-se na BNCC em atrelar cada habilidade a um código alfanumérico composto por 8 caracteres, sendo que cada parte desta sigla possui um significado, como veremos no exemplo a seguir considerando a habilidade EF01MA09:

Tabela 1.1 – Explicação da sigla utilizada pela BNCC

Parte da sigla	**Significado**	**Explicação**
EF	Ensino Fundamental	Indica a etapa da educação básica a que se destina a habilidade
01	Primeiro ano	Indica o ano do ciclo
MA	Matemática	Indica o componente curricular da habilidade
09	Nona habilidade do primeiro ano	Ordem em que aparece a habilidade para este ano do ciclo

Fonte: Elaborada pela autora

Sobre a estrutura da habilidade: As habilidades possuem uma estrutura fixa sendo compostas por um ou mais verbos, que indicam a ação que se espera ser desenvolvida enquanto aprendizado; objeto de conhecimento e complemento, elemento não obrigatório na habilidade que dá uma especificação ao conteúdo em questão.

Exemplos:

1 - (EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.

2 - (EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.

No primeiro exemplo vemos uma habilidade composta por um verbo, objeto de conhecimento e complemento, já no segundo exemplo não há especificação para o trabalho do objeto de conhecimento, ou seja, não há complemento.

O verbo indica o grau de aprofundamento que se espera do estudante com relação ao saber de maneira que pode ser observada uma ascendência no grau de complexidade da ação proposta pelos verbos na progressão[2] dos anos.

Tabela 1.2 – Objetos de conhecimento e habilidades de Álgebra propostos pela BNCC para os anos iniciais do ensino fundamental

ANO	OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADE
1º ANO	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.

[2] Essa progressão é proposta a partir da Taxionomia de Bloom. Para saber mais a respeito, sugerimos a leitura do artigo de Cipriano Luckesi “Taxionomia de objetivos educacionais sessenta anos depois” nas páginas 38 à 47 da Revista Educatrix, Ano 1, Nº 1, de Setembro de 2011. Disponível em: https://issuu.com/ed_moderna/docs/educatrix_edicao_01. Acesso em: 12 Abril 2021.

	Sequências recursivas: observação de regras utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2º ANO	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3º ANO	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
	Relação de igualdade	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
4º ANO	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
	Propriedades da igualdade	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

5º ANO	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
	Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: adaptado de BRASIL (2017, p. 278-297)

Ao lermos a sequência das habilidades percebemos que, ao longo dos anos da escolaridade, a complexidade cresce progressivamente, sendo alguns temas retomados nesta mesma perspectiva, ou seja, a apropriação do conhecimento é proposta de maneira espiral. Observando o verbo utilizado esse fato salta aos olhos: No período de alfabetização (1º e 2º anos) espera-se que o estudante **organize**, **descreva** e **construa** hipóteses com relação aos objetos de conhecimento. No período seguinte a expectativa é de que sejam **identificadas**, **compreendidas**, **determinadas**, **concluídas**, **resolvidas** e **elaboradas** situações referentes aos objetos de conhecimento estabelecidos. Ou seja, o processo cognitivo expresso pelo verbo passa a ser cada vez mais complexo, sendo necessário que o estudante se aproprie das aprendizagens propostas no nível anterior para ser possível prosseguir para o nível seguinte de aprendizagem.

Veja como exemplo as habilidades referentes aos objetos de conhecimento ligados à construção da ideia de equivalência (EF03MA11, EF04MA14, EF04MA15, EF05MA10 e EF05MA11). Incialmente o estudante deve entender a funcionalidade da igualdade, observando que operações distintas podem levar a um mesmo resultado, depois reconhecer e mostrar a validade de algumas de suas propriedades, inclusive determinando um número natural desconhecido que torna verdadeira a igualdade, para a seguir, concluir, por meio de investigações, que as operações que são feitas em ambos os lados da igualdade com um mesmo número não a alteram e, por fim, resolver e elaborar problemas que recaiam em igualdades de operações nas quais um dos termos não é conhecido.

As regularidades, padrões e a noção de equivalência são destaques das habilidades selecionadas para este período.

Outro ponto clarificado é que o uso da notação algébrica formal neste período de escolarização não é indicado dentre os saberes propostos, a habilidade que mais abre espaço para a introdução dessa linguagem é a EF05MA11: “Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido” de maneira que não necessariamente deve-se fazer o uso de incógnitas tal como a notação mais atual (uso das últimas letras do alfabeto), mas já pode ser introduzida alguma simbologia mais próxima ao contexto da situação problema ou do estudante que as represente.

De acordo com Nilson José Machado (2015) uma ideia é considerada fundamental em Matemática se atender a três critérios: ser facilmente caracterizada, não sendo necessário recorrer a termos sofisticados para a sua definição; possibilitar vínculos intramatemáticos de modo que se possa notar sua presença e favorecer a articulação entre as diferentes unidades temáticas do componente e, por fim, não se esgotar dentro de um único componente.

Conforme mencionado anteriormente as ideias fundamentais de matemática trabalhadas nesta unidade temática são a equivalência, interdependência, variação e proporcionalidade.

Podemos observar o trabalho a partir da ideia de equivalência nas habilidades EF03MA11, EF04MA12, EF04MA13, EF04MA14, EF04MA15, EF04MA10 e

EF05MA11. Pois nelas estão expressos aspectos referentes às propriedades da igualdade que contribuem com a sistematização de ideias e o aprendizado de equações.

As ideias de variação e interdependência andam lado a lado e estão ligadas à construção da ideia de função. A ideia de variação está relacionada ao estudo das formas de crescimento ou decrescimento favorecendo a busca por regularidades. Já a ideia de interdependência pode começar a ser explicada por meio da sentença "se p, então q" (MACHADO, 2015), ela descreve a relação de dependência entre termos para a sua variação. Podemos ver essas ideias fundamentais nas habilidades: EF01MA09, EF01MA10, EF02MA09, EF02MA10, EF02MA11, EF03MA10, EF04MA11 e EF04MA13.

A ideia de proporcionalidade, vista de maneira muito clara em funções do primeiro grau, caminha muito próxima às duas últimas citadas, dado que a variação de termos de maneira proporcional traduz uma relação de interdependência. Esta ideia destaca-se em habilidades como: EF05MA12 e EF05MA13.

Mediante o que foi apresentado restam questionamentos acerca de quais ações do professor contribuem para a efetivação do Pensamento Algébrico na forma proposta por nosso trabalho. Conhecer um pouco da história da Matemática relacionada ao desenvolvimento da Álgebra nos dá pistas a respeito de como agir.

2. PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM OLHAR PARA MOMENTOS HISTÓRICOS QUE CONTRIBUÍRAM PARA O SEU DESENVOLVIMENTO

Como vimos no capítulo anterior, a partir da homologação da Base Nacional Comum Curricular em dezembro de 2017, passa a ser incorporado aos anos iniciais do ensino fundamental do Brasil a unidade temática Álgebra. Com o intuito de estudar esta proposta e pensar elementos e ações do professor que a viabilizem, daremos neste capítulo um primeiro passo ao compartilhar como se deu historicamente o desenvolvimento do Pensamento Algébrico utilizando a concepção dos autores supracitados. Não de modo a esgotar a evolução das representações nem a história da Álgebra, mas com intuito de “passear” por elas destacando aspectos que julgamos relevantes para a evolução do Pensamento Algébrico.

Ao olharmos para os registros referentes à história da Matemática notamos que o desenvolvimento da Álgebra está bastante relacionado a um desenvolvimento de pensar algebricamente, ou seja, da busca por padrões e regularidades a fim de ser possível traçar generalizações. No entanto é uma tarefa complexa descrever esses momentos históricos, pois por mais que a ideia de Álgebra tenha evoluído ao longo de seu processo de construção, ainda hoje muitos a definem pura e simplesmente como “ciência da solução de equações” (KIERAN, 2004), de modo que se perpetua a dificuldade em desatrelar conceitos referentes a ela de expressões com incógnitas e constantes indicadas por letras.

Existe uma caracterização do desenvolvimento da Álgebra ao longo da história em três estágios feita por Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann em 1842, da qual muitos autores se utilizam: álgebra retórica, álgebra sincopada e álgebra simbólica. No primeiro os argumentos para a resolução de problemas são dados de forma verbal, sem simbologias, no segundo começa-se a utilizar abreviações para alguns valores e operações que se repetem com maior frequência e no terceiro conta-se apenas com linguagem simbólica (EVES, 2007). Em nossa abordagem poderão ser percebidos momentos na história da Matemática em que esses três aspectos se destacam.

Tatiana Roque traz em seu livro “História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas” a preocupação com os anacronismos cometidos por historiadores ao afirmar que em dados períodos históricos certos povos já estariam desenvolvendo esse ou outro tratamento matemático em seus problemas, sendo que não há nestes momentos históricos a consolidação de tais conceitos. Buscaremos ter a preocupação em não perpetuar tais anacronismos. Inicialmente iremos trazer alguns momentos históricos em que se destaca um tratamento sintético do estudo da resolução de problemas, que não deixam de ser passos na direção do que se entende por Álgebra atualmente, e observar o quanto se alinham a uma construção mais significativa do saber. Na sequência, momentos nos quais tal tratamento passa a ser analítico.

2.1 MOMENTOS HISTÓRICOS QUE REPRESENTAM A EVOLUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Por volta do ano 2000 a.C. os babilônios tratavam de situações que hoje nos remeteriam a equações quadráticas[3] e discutiam a resolução de situações problemas em que se enquadrariam as cúbicas[4] e biquadradas[5]. O tratamento dado por eles a essas situações era por meio da proposição de problemas e a explicitação do procedimento para resolvê-los passo a passo amparados numa lógica geométrica. Para lidar com problemas distintos eles buscavam um alinhamento ao que já foi proposto para prosseguir no passo a passo. Os algoritmos por eles propostos “[...] eram enunciados para casos particulares, mas isso não significa que não houvesse um certo tipo de generalidade (ROQUE, 2017, p. 64)”.

De acordo com Roque (2017) o tratamento utilizado para resolver situações que recairiam no que concebemos hoje por equação do 2º grau era feito de forma

---

[3] As quadráticas ou equações do segundo grau são equações do tipo $ax^2+bx+c=0$, com a, b, c pertencentes ao conjunto dos números reais, $a\neq0$.
[4] Uma cúbica é uma equação do tipo $ax^3+bx^2+cx+d=0$, com a, b, c, d pertencentes ao conjunto dos números reais, $a\neq0$.
[5] Uma biquadrada é uma equação do tipo $ax^4+bx^2+c=0$, com a, b, c pertencentes ao conjunto dos números reais, $a\neq0$.

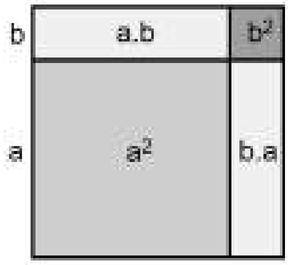
retórica explicitando a técnica de se encontrar as raízes pelo método de completar quadrados. Método este, que *traduzido* para nossa notação algébrica atual, recairia no que denotamos aqui no Brasil por fórmula de Bháskara[6] (séc. XII).

Nos papiros Rhind e Moscou (cerca de 1650 a.C. e 1850 a.C., respectivamente) se encontram elementos relevantes da história da Matemática egípcia, neles, segundo Eves (2007), há 110 problemas geralmente pautados em questões práticas tendo apenas algumas questões teóricas, nas quais já aparece algum tipo de simbologia matemática, como símbolos para *mais* e para *menos:* “o primeiro deles era representado por um par de pernas caminhando da esquerda para a direita, [...] e o outro era representado por um par de pernas caminhando da direita para a esquerda, [...]” (EVES, 2007), e símbolos para *igual*, e para *incógnita*. Alguns dos problemas propostos referem-se a descobrir quantidades desconhecidas, que poderiam ser ditos hoje como exemplos de situações para se trabalhar equação do primeiro grau, como o seguinte: "Uma quantidade, somada a seus 2/3, mais a metade e mais a sua sétima parte perfaz 33. Qual essa quantidade?". O método de resolução empregado era o que ficou conhecido mais tarde por falsa posição.

Os gregos antigos utilizavam o número enquanto medida, a “demonstração” de suas descobertas e conclusões era pautada em figuras geométricas, como o caso da identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, decompondo um quadrado de lado a + b em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2, b^2, a.b, b.a (Figura 2.1). Eles buscavam traduzir as situações que se punham a estudar em situações geométricas relacionadas a proporções e áreas. Destacam-se neste tempo os matemáticos Thales de Mileto (~624a.C. – 546a.C.) e Euclides de Alexandria (~360 a.C. – 295 a.C.).

[6] Conhecida mundialmente por “Fórmula de resolução de equações do 2º grau”.

Figura 2.1 - Identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Fonte: Elaborada pela autora

Diofanto de Alexandria (por volta do século III), considerado por alguns autores o pai da Álgebra, em sua obra *Arithmetica* propôs e resolveu uma série de problemas dando um tratamento igual a quantidades conhecidas e a quantidades desconhecidas com relação às operações. Na parte remanescente de sua obra, são tratados de maneira analítica, cerca de 130 problemas, cujo conteúdo remeteria às nossas atuais equações do 1º e do 2º grau, cúbicas, e em duas ou mais incógnitas.

As respostas admitidas por Diofanto eram apenas as de números racionais positivos e, muitas vezes, ao encontrar um valor que atendesse às equações, já se dava por satisfeito. Ele não foi o primeiro a resolver esses tipos de equações, mas ele deu um passo significativo em direção à sistematização da notação algébrica utilizando abreviações e uma lógica amparada na oralidade. De acordo com a caracterização de Nesselman, ele praticava uma álgebra sincopada.

A seguir podemos ver o uso de sua notação na qual, por exemplo, a incógnita ao quadrado é representada pelas duas primeiras letras gregas da palavra *dynamis* (potência) Δ^{Y}:

Figura 2.1 – Notação utilizada por Diofanto

Fonte: EVES (2007, p.209)

Que leríamos:

Incógnita ao cubo 1, incógnita ao quadrado 13, incógnita 5, referindo-se a expressão que hoje representamos por $x^3 + 13x^2 + 5x$.

Nas resoluções utilizadas pelos hindus destaca-se a álgebra retórica, eles utilizavam, entre outros métodos a ideia de completar quadrados[7] e a inversão (veremos a utilização desse método a seguir). Boa parte do conhecimento de aritmética hindu encontra-se na obra *Lilavati de Bhaskara* (sec. XII). Eles *poetizavam* as situações problema propostas e geralmente as utilizavam como entretenimento social. Vejamos um exemplo:

> Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendeis o método de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de ¾ do produto, depois dividido por 7, diminuído de 1/3 do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10 resulta no número 2? (EVES, 2007, p.255)

Para resolver essa situação, por meio do método de inversão, eles iniciavam por seu resultado e aplicavam as operações inversas, como veremos a seguir:

$$(2.10 - 8)^2 + 52 = 196$$

$$\sqrt{196} = 14$$

$\frac{14.\left(\frac{3}{2}\right).7.\left(\frac{4}{7}\right)}{3} = 28$, que é o número procurado[8].

O conhecimento aritmético dos hindus lhes possibilitava operar com somas de progressões aritméticas e geométricas, juros simples e compostos, entre outros. Sabemos que lidar com tais situações requer observação, generalização do que tem ocorrido e ideias relacionadas à *aritmética generalizada* e ao *pensamento funcional*

---

[7] Um trinômio quadrado perfeito (TQP) é uma expressão do segundo grau que pode ser fatorada, por exemplo, x^2+4x+4, que podemos fatorar e reescrever por $(x+2)^2$. O método de completar quadrados consiste em transformar parte de uma equação do segundo grau em um TQP ao somarmos uma constante a ambos os lados de uma equação a fim de facilitar sua resolução. Por exemplo, $x^2+4x+1=0$, não possui um TQP, ao somarmos 3 a ambos os lados da equação obtemos um TQP, de maneira que podemos reescrever a equação por $(x+2)^2=3$ (CHAVANTE, 2015).

[8] Nos utilizamos de simbologia moderna para indicar a resolução, no entanto reiteramos que a resolução deles era por meio de instrução verbal. Para ver o detalhamento do método leia o Apêndice A na página 68.

(termos que veremos com mais detalhes no próximo capítulo), aspectos referentes ao Pensamento Algébrico.

No registro dos hindus, podemos encontrar a forma sincopada de acordo com a definição de Nesselmann, ou seja, o uso de abreviações das palavras para denotar operações e incógnitas, e a junção dessas abreviações aos números. Eles aceitavam os números irracionais e negativos e pode-se dizer que foram além de Diofanto no sentido de buscar métodos que possibilitassem encontrar todas as soluções possíveis para uma equação.

Os árabes abarcaram muito do conhecimento dos territórios conquistados e vez ou outra mudavam, por exemplo, a maneira de registrar números, ora escrito por extenso ora por meio de símbolos. A contribuição desse povo para o desenvolvimento da Álgebra estava geralmente pautada em regras para calcular com base nos algoritmos hindus, expressa no geral de maneira retórica. Utilizando-se de métodos como o da falsa posição[9] e falsa posição dupla[10] resolviam problemas que temos hoje por algébricos sem uso de notação algébrica. Al-Khwarizmi (sec. IX) propunha resoluções de situações voltadas a mensuração e problemas de herança (que recairiam em nossas atuais equações lineares quadráticas) por meio da Aritmética e da Geometria.

Segundo Roque (2017) é com Al-Khwarizmi que surge a Álgebra "no estudo sistêmico dos métodos para classificar e resolver equações" seu trabalho *"Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala"* é inclusive responsável pelo termo álgebra – *al-jabr* (restauração), que aliado a *al-muqabala* (balanceamento) seriam duas etapas do método por eles proposto de resolução de equações. O modo de abordagem do matemático era expresso totalmente de forma retórica, sendo *Adad* (número ou quantidade de dinheiro – a quantidade conhecida), *Jidhr* (raiz – a quantidade desconhecida) e *Mal* (possessão ou tesouro – o quadrado da quantidade desconhecida), termos utilizados para expressão de seu pensamento. Ele caracterizou a equação do segundo grau por meio de seis tipos, de modo que todos

---

[9] Trata-se de um método para resolver equações do tipo ax=b a partir de um *chute inicial* e da comparação entre o valor obtido e o b. Caso o *chute* não dê certo o valor de x é descoberto por meio de proporção considerando-se o valor obtido, o esperado (b) e o chute (GUELI).

[10] Método utilizado para resolver equações do tipo ax+b=c, no qual são feitos dois chutes iniciais (GUELI).

os coeficientes fossem positivos e enunciou regras gerais de resolução para cada um deles. Vejamos um exemplo por ele utilizado e trazido por Roque (2017):

"Um *Mal* e dez *Jidhr* igualam 39 dinares", o que em nossa notação atual expressaríamos como: $x^2 + 10x = 39$. Procedimento empregado para a resolução:

> Tome a metade da quantidade de *Jidhr* (5);
> Multiplique essa quantidade por si mesma (25);
> Some no resultado os *Adad* (39 + 25 = 64);
> Extraia a raiz quadrada do resultado (8) e
> Subtraia desse resultado a metade dos *Jidhr*, encontrando a solução (8 - 5 = 3) (ROQUE, 2017, p.252, adaptado).

Que, como Roque (2017) muito bem esquematizou (Figura 2.2), se trata da fórmula para resolução da equação do segundo grau que utilizamos hoje explicitada oralmente etapa por etapa:

Figura 2.2 – Esquema elaborado por Roque

Solução apresentada por Al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna considerando uma equação genérica do tipo ou $x^2 + bx - c = 0$
Tome a metade da quantidade de *Jidhr*	$^{10}/_2 = 5$	$^b/_2$
Multiplique essa quantidade por si mesma	$5^2 = 25$	$(^b/_2)^2$
Some no resultado os *Adad*	$25 + 39 = 64$	$(^b/_2)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{(^b/_2)^2 + c}$
Subtraia desse resultado a metade dos *Jidhr*, encontrando a solução	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{(^b/_2)^2 + c} - {}^b/_2$

Fonte: ROQUE (2017, p. 252)

Ao se falar de simbologia moderna alguns nomes se destacam, como o do inglês Robert Recorde (1512-1558), o primeiro a utilizar o sinal de igual em suas obras em 1557 tal como fazemos hoje. Segundo ele sua escolha por um par de retas paralelas se deu devido a acreditar que “não pode haver duas coisas mais iguais” (EVES, 2007, p. 301). O sinal de radical $\sqrt{r}$, provavelmente escolhido por lembrar um r de raiz, aparece pela primeira vez nas obras do alemão Christoff Rudolf (1499-1545) em 1525, ele também utilizou em sua obra os sinais de mais, menos e a representação de incógnitas por meio de letras.

Rafael Bombelli (1526-1572) contribui para o desenvolvimento das resoluções de equações cúbicas e para a notação algébrica, denotando expressões do tipo $\sqrt{7+\ \sqrt{4}}$ como:

Figura 2.3 – Notação algébrica de Bombelli

$$R \lfloor\ 7\,p\,R\,14\ \rfloor$$

Fonte: EVES (2007, p.308)

Sendo o sinal de *mais* denotado pela primeira letra de *plus*; para diferenciar a raiz quadrada da cúbica ele se utilizava de R q e R c, respectivamente.

O francês François Viète (1540-1603) trouxe também grandes contribuições ao Pensamento Algébrico em seus trabalhos acerca de Álgebra, Trigonometria e Geometria. Ele se propôs a *restaurar* o olhar analítico algébrico para a resolução de problemas, a escolha do termo *restaurar* se deve a ele acreditar que os gregos já o faziam e que em algum momento essa prática se perdeu. Sua notação foi um passo significativo em direção a que hoje utilizamos. Segundo Roque:

> [...] pelo método analítico, supomos que as soluções desconhecidas são conhecidas e operamos com elas como se fossem conhecidas, até chegar a um resultado conhecido que determina a solução. A simbolização algébrica permite representar essas soluções desconhecidas por símbolos, manipulados segundo as mesmas regras que os números conhecidos (ROQUE, 2007, p. 300).

Viète utilizava vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Antes dele era comum usar letras distintas para identificar potências diferentes de uma mesma quantidade, ele usava a mesma letra qualificando a potência a que se refere, assim A, A quadratum, A cubum, seriam suas representações para x, x^2, x^3. Os símbolos por ele utilizados para mais e menos eram os mesmos que utilizamos hoje, mas não havia símbolo para a igualdade, assim o que escreveríamos por $5bx^2 - 2cx + x^3 = d$, ele escreveria*: B 5 in A quad – C plano 2 in A + A cub aequatur D sólido*. Ele buscou apresentar a Álgebra ao estilo grego, dando a ela um tratamento axiomático. De seu legado podemos citar um processo iterativo de aproximações sucessivas de uma raiz de uma equação; o estudo de equações até o grau cinco buscando e propondo maneiras de resolvê-las por meio de substituições que diminuam seu grau; a aplicação da Álgebra à Trigonometria e à Geometria, e o estudo dos três problemas famosos[11] trazendo a eles contribuições significativas.

Os franceses René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1607-1665) trouxeram boas contribuições para a Álgebra em sua busca por traduzir a Geometria em uma linguagem aritmética, operando com grandezas como se opera com números, o que era uma quebra de paradigma para a época.

Descartes propôs uma abordagem analítica tal como Viète, em suas palavras:

> [...] sem fazer distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, devemos percorrer a dificuldade da maneira mais natural possível, mostrando as relações entre essas linhas, até que seja possível expressar uma única quantidade de dois modos. A isto chamamos Equação, uma vez que os termos de uma dessas expressões são iguais aos termos da outra (ROQUE, 2007, p. 322).

Sua ideia era desenvolver um método que permitisse reduzir problemas geométricos à resolução de uma ou mais equações (ROQUE, 2007). A convenção utilizada hoje de exprimir incógnitas pelas últimas letras do alfabeto e constantes pelas primeiras foi introduzida por ele em 1637.

---

[11] Os três famosos problemas matemáticos da antiguidade tiveram origem na Grécia antiga. Todos eles são do tipo geométrico e procurava-se chegar à sua solução usando apenas uma régua não graduada (sem marcas) e um compasso. Estes dois instrumentos só podiam ser utilizados de acordo com as regras dos três primeiros postulados de Euclides. Ou seja, a régua só podia ser usada para unir dois pontos ou estender uma linha e o compasso para desenhar um círculo a partir de um ponto central e de um ponto da circunferência. Aqui fica a lista dos famosos problemas: **Quadratura do Círculo; Duplicação do Cubo** e **Trissecção do Ângulo**.
Estes problemas intrigaram os matemáticos gregos da antiguidade, por não conseguirem encontrar uma solução satisfatória. Só recentemente, passados mais de 2000 anos desde que os problemas foram colocados, é que foi provado que os problemas não tinham solução usando apenas os dois instrumentos propostos (NUNES, 2020).

Tanto Fermat quanto Descartes estudavam a relação entre lugares geométricos e equações indeterminadas, sendo que Fermat partia das equações para determinar retas, círculos e cônicas e Descartes dos lugares geométricos. Outra quebra de paradigma vivenciada e superada por Fermat foi a necessidade de uma abordagem sintética daquilo que ele já havia apresentado um resultado analítico, ou seja, ele superou a necessidade de apresentar uma construção geométrica que também refletisse o resultado que já havia encontrado operando grandezas desconhecidas como se fossem conhecidas.

Com a evolução do conhecimento matemático, no início do século XIX, o olhar dado para a Álgebra pelos matemáticos, e/ou estudiosos de Matemática, passa a ser de uma aritmética simbólica, sendo expressas propriedades e axiomas referentes a dados conjuntos por meio de letras.

De acordo com Eves (2007) um nome de destaque na evolução da Álgebra mais formal, aquela que vemos nos cursos de graduação em Matemática, é o do inglês Georg Peacock (1791-1858), pois buscou dar a este campo um tratamento semelhante ao que foi dado à Geometria por Euclides[12]. Mais tarde matemáticos como Willian Rowan Hamilton (1805-1865), Hermann Günther Grassmann (1809-1877) e Arthur Cayley (1821-1895) passaram a dar a este campo um tratamento mais abstrato desenvolvendo álgebras que satisfazem leis estruturais diversas conforme lhes imprimia o estudo de campos específicos.

[12] O grego Euclides de Alexandria (300 a.C.) organizou todo o conhecimento da época relacionado à Geometria na obra Elementos. Ele estabeleceu algumas definições – postulados – no intuito de dar sentido à Geometria e para poder provar suas proposições (ROQUE, 2017).

2.2 O QUE ESSES MOMENTOS NOS INDICAM COM RELAÇÃO AO TRABALHO COM ÁLGEBRA

Podemos dizer que se destacam nos momentos compartilhados na subseção anterior dois processos evolutivos: O primeiro é a construção da notação algébrica, de modo que se inicia a resolução de problemas com amparo na língua materna, seja por meio da fala ou da escrita, perpassando as abreviações e uso de alguns símbolos até chegar à linguagem puramente simbólica. O segundo é o nível de abstração que se permite ter ao resolver problemas, inicialmente, na abordagem sintética, as resoluções se apoiam nas construções geométricas e por fim, na abordagem analítica, que permite operar algebricamente lidando com quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas.

Vimos assim que a evolução da unidade temática que conhecemos hoje por Álgebra, historicamente, perpassa o uso de estratégias diversas e gradativamente incorpora a sistematização mais resumida amparada em simbologia para resolver problemas. O caminho proposto aos estudantes, de inicialmente compreender o manejo de expressões algébricas para depois tentar traduzir problemas para essa linguagem, sem tanta preocupação com o entendimento do que é proposto, distancia-se de como se dá a construção do pensamento (como vimos na história) e propõe a eles abstrações sem amparo de sentido, apenas a memorização de modos de se resolver situações que têm características mais próximas.

Coelho e Aguiar (2018) reforçam essa ideia, nos indicando que a história da Álgebra nos mostra uma recorrente busca por padrões para resolução de problemas e destacam todo o pensamento envolvido por trás das respostas encontradas, assim como os estágios percorridos pela notação algébrica ao longo desse desenvolvimento, conforme a classificação de Nesselmann. De maneira que a história evidencia a importância de se descobrir padrões e regularidades, o que dialoga com a definição de Pensamento Algébrico compartilhada no capítulo anterior, reforçando a necessidade de que essa ideia seja desenvolvida na escola ao longo de todo o período escolar. Nas palavras dos autores

> [...] o ensino, ao invés de tratar inicialmente das técnicas de resolução de problemas propriamente ditas, deveria focar mais na discussão dos significados dos conceitos algébricos. Como dissemos, não defendemos que as técnicas devam ser abandonadas, apenas que não devam ser a preocupação inicial, ou única, para o bom aprendizado. Entender, em um primeiro momento, que existem padrões e propriedades por trás das operações é mais importante do que a mera memorização de técnicas operatórias. Mesmo as fórmulas, quando for o momento de aprendê-las, podem, e devem, ser justificadas a partir dos mesmos parâmetros conceituais (COELHO; AGUIAR, 2018, p. 184).

O olhar para uma proposição relacionada ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico – ou seja, partir de situações reais ou de contextos próximos ao estudante, incentivando e possibilitando o amparo em estratégias pessoais de resolução, o conflito entre hipóteses e conjecturas e após isso a construção em conjunto da sistematização – pode repercutir de fato na aprendizagem dos saberes em questão. Além disso, de acordo com os estudos de Kieran (2004), para romper com a transição traumática da Aritmética para a Álgebra faz-se necessário um olhar e um tratamento diferenciado desde os anos iniciais do ensino fundamental, de modo que ideias como as representações de situações problema, as relações estabelecidas para além do cálculo e o significado do sinal de igual sejam clarificados.

3. INDICATIVOS ACERCA DE COMO EFETIVAR A APROPRIAÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NAS SÉRIES INICIAIS

Neste capítulo iremos tratar a respeito de alguns estudos acerca da inserção do Pensamento Algébrico nas séries iniciais a fim de entender indicativos sobre este trabalho e viabilizar um norte ao trabalho do professor para a implementação das habilidades apresentadas na BNCC.

As autoras que dão base a este capítulo foram escolhidas devido à aproximação das mesmas de práticas de sala de aula, elas falam a respeito de metodologia e compartilham momentos em que esta está sendo colocada em prática. Nossa aproximação delas ocorreu ao longo do curso de mestrado, assim como na formação continuada de professores.

As pesquisadoras Carolyn Kieran, Bárbara Brizuela e Ana Paula Canavarro nos dão boas pistas para o entendimento de como propiciar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. A primeira é uma das pioneiras no assunto e dela foram utilizadas definições acerca do Pensamento Algébrico e contribuições com relação à importância de se conduzir um estudo fluido da Álgebra desde os anos iniciais do ensino fundamental. Das duas últimas, contribuições de estudos a partir de situações vivenciadas em sala de aula nas quais o foco foi o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental.

3.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM POUCO SOBRE O PERCURSO PERCORRIDO PARA UMA DE SUAS DEFINIÇÕES

Carolyn Kieran, professora emérita da Universidade do Quebec em Montreal, - foi membro do NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática) - tem atuado na pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra, tendo atualmente voltado o olhar mais especificamente para este processo nos anos iniciais do ensino fundamental enfatizando o aprendizado de conceitos e a articulação entre o processo de generalização e o de ver a estrutura em expressões aritméticas.

Em seu texto "Pensamento Algébrico nas primeiras séries: o que é?" a autora traz um estudo acerca do que define o Pensamento Algébrico, clarificando sua atuação principal nos estudos acerca da aprendizagem nos anos finais do ensino fundamental. A introdução ao assunto se dá discutindo o olhar que se tinha da Álgebra, de estudo de equações, trabalhada na escola apenas no ensino médio após o estudo da Aritmética. As dificuldades de aprendizagem, observadas no final do século XX, motivaram buscas por alternativas, de maneira que houve um repensar nos objetos de conhecimento e a introdução de alguns deles nos anos finais do ensino fundamental.

Ela chama a atenção para a ruptura que há entre o ensino da Aritmética e da Álgebra, destacando que, mesmo os estudantes com mais facilidade na aprendizagem do que lhes é proposto, apresentam dificuldades na introdução da Álgebra, dado que, em certo grau, as duas unidades temáticas acabam por não dialogar. Por exemplo, o sinal de igual na Aritmética é tido como um separador entre uma operação e um resultado e este por sua vez tem uma posição certa para ocupar, a operação do lado esquerdo e a solução do lado direito do sinal. Em Aritmética não se tem estudado as relações, o foco tem sido no cálculo (KIERAN, 2004, p. 140). Ela indica alguns aspectos que devem ser trabalhados de modo a corroborar com uma maneira algébrica de se pensar:

> 1. Um foco nas relações e não apenas no cálculo de um valor numérico;
> 2. Um foco nas operações, bem como seus inversos, e na ideia relacionada de fazer / desfazer;
> 3. Um foco em representar e resolver um problema, em vez de apenas resolver;
> 4. Foco em números e letras, ao invés de apenas números. Este inclui:
> (i) trabalhar com letras que às vezes podem ser desconhecidas, variáveis ou parâmetros;
> (ii) aceitar expressões literais não fechadas como respostas;
> (iii) comparar expressões para equivalência com base em propriedades ao invés de focar na avaliação numérica;
> 5. Uma reorientação do significado do sinal de igual.
> (KIERAN, 2004, p. 140-141).

E compartilha que os estudos mais recentes têm concluído que uma forma de aplacar a ruptura entre o ensino da Aritmética e o ensino da Álgebra é trazer a Álgebra para as séries iniciais com a perspectiva de desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Uma definição da autora para este termo:

> O Pensamento Algébrico pode ser interpretado como uma abordagem para situações quantitativas que enfatiza os aspectos relacionais gerais com ferramentas que não são necessariamente letra-simbólica, mas que pode, em última análise, ser usada como apoio cognitivo para introduzir e sustentar o discurso mais tradicional de Álgebra escolar (KIERAN, 1996, p. 275).

Kieran nos diz que em 2004, ano da escrita do artigo consultado, não havia um consenso para a definição de Pensamento Algébrico nas séries iniciais. Ela percorre alguns documentos curriculares daquele momento, tanto para ver o que eles apresentam quanto para traçar uma nova definição que faça sentido para a inclusão da Álgebra nas séries iniciais, de maneira que essa inclusão contribua para um processo de ensino e aprendizagem desta unidade temática sem rupturas ao longo da escolarização.

Existem diferentes vertentes que compõem a definição da Álgebra, sendo uma delas a da própria autora elaborada em 1996. Ela caracteriza a álgebra escolar com base nas atividades realizadas pelos estudantes em: atividades geracionais, atividades transformacionais e atividades globais de meta-nível. As atividades geracionais estão relacionadas a tudo que envolve a formação de expressões e equações. As atividades transformacionais estão relacionadas às regras de manipulação dessas expressões algébricas e equações. E, por fim, as atividades globais de meta-nível referem-se a Álgebra sendo utilizada como ferramenta e estão relacionadas ao que lhe dá sentido e significado: “elas incluem resolução de problemas, modelagem, estrutura de observação, estudo de mudanças, generalizando, analisando relacionamentos, justificando, provando e prevendo – atividades que poderiam ser feitas sem o uso de álgebra” (KIERAN, 2004, p. 142). Esta última categorização é, segundo a autora, a mais propícia para ser trabalhada com os anos iniciais do ensino fundamental e é com base nela que traz uma definição para Pensamento Algébrico nas séries iniciais finalizando o artigo:

> O Pensamento Algébrico nas séries iniciais envolve o desenvolvimento de formas de pensar dentro de atividades para as quais a Álgebra de letras simbólicas pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas da Álgebra e que poderiam ser pensadas sem usar qualquer Álgebra de letras simbólicas, como analisar relações entre quantidades, estrutura de observação, estudo de mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever (KIERAN, 2004, p. 149, tradução nossa).

Deste modo podemos compreender que o Pensamento Algébrico a ser trabalhado nas séries iniciais é, segundo a autora, um trabalho que envolve o estudo das relações que podem ser observadas na Aritmética, devendo ser apresentadas ao estudante por meio de situações problemas corroborando para a observação de estruturas, identificação de padrões e a generalização deles sem, necessariamente, utilizar a notação algébrica.

3.2 A ÁLGEBRA NOS PRIMEIROS ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL: CONTRIBUIÇÕES DE BRIZUELA

A argentina Bárbara Brizuela, professora da Universidade de Tufts - EUA, é outra pesquisadora da atualidade que tem defendido o ensino da “álgebra precoce” propondo um trabalho que explore a articulação entre a Aritmética e a Álgebra. Sua pesquisa é pautada em como se dá o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nas séries iniciais. Segundo ela, o fracasso escolar dos estudantes em Álgebra não deve ser atribuído tão somente a eles, mas a questões de ensino, propondo que desde cedo sejam trabalhadas situações que favoreçam o desenvolvimento do Pensamento Algébrico na busca de não haver ruptura entre o que é ensinado nas séries iniciais e o que é ensinado nas séries finais.

Em seu livro “Desenvolvimento matemático na criança – Explorando notações”, ela propõe um estudo sobre a relação entre o uso das notações por crianças de 2ª à 4ª série (nossos atuais 3º ao 5º ano) e a construção de conceitos matemáticos. Os capítulos 5 à 7 são dedicados a conceitos relacionados à Álgebra, com base no projeto de pesquisa *Early Algebra*, nele, situações problema que resolveríamos por meio de regra de três, sistemas e análise de funções, dão lugar aos diferentes esquemas utilizados pelas crianças para observar regularidades e chegar aos resultados solicitados, como o uso de desenhos, tabelas e até mesmo de incógnitas. O estudo, classificado pela autora como estudo do "pré-álgebra", foi desenvolvido na escola das crianças por meio de encontros periódicos, o público-alvo era composto por crianças de várias etnias de maioria com baixa renda de uma escola pública.

As principais bases teóricas de seu estudo são de Piaget e Ferrero, de modo que é buscada uma compreensão da psicogênese da linguagem matemática. Às crianças participantes do programa de pesquisa foi permitido e incentivado utilizar as diferentes notações, tanto para representar as situações problema, quanto para compreendê-las, destacando que não havia um direcionamento acerca de qual tipo de esquema utilizar, de modo que as crianças criavam suas notações que gradualmente tornavam-se cada vez mais independentes do contexto das situações colocadas, mais esquemáticas e gerais.

Considerando que a experiência da criança com alguns conceitos matemáticos começa antes da escolarização, viabilizar o uso do desenho e de outras representações pessoais "[...] permite que as crianças compreendam e resolvam situações e realizem procedimentos que, de outra forma, estariam além do seu alcance" (BRIZUELA, 2006, p. 73). De modo que o grupo de pesquisadores, com base nas observações, concluíram cada vez mais ser possível desenvolver, nesta faixa etária, a compreensão de conceitos matemáticos considerados fundamentais para a aprendizagem da Álgebra.

É importante destacar que as notações algébricas convencionais têm seu papel na vida do estudante, pois, como diz Cajori (1929, p. 332): "ao poupar o cérebro de todo o trabalho desnecessário, uma boa notação deixa-o livre para se concentrar em problemas mais avançados", no entanto ainda mais importante que o uso de uma boa notação é a compreensão das situações problemas propostas, por esse motivo um trabalho focado nessa compreensão sem uma preocupação direta inicial com a linguagem formal é primordial. E este é um dos olhares do projeto de pesquisa *Early Algebra*, como lemos a seguir:

> Embora as crianças possam expressar espontaneamente essas propriedades e relações gerais por meio de uma linguagem natural, sem fazer uso de outras notações, elas também podem expressá-las por meio de notações escritas, sem precisar tratar a notação convencional como um mero apêndice do raciocínio (BRIZUELA, 2006, p. 72).

Os problemas eram propostos e os estudantes incentivados a resolvê-los utilizando qualquer tipo de notação que se sentissem confortáveis, como flechas, formas, desenhos, *gráficos de torta* (representando frações). É importante citar que o repertório foi sendo construído pelo professor da turma. O compartilhamento coletivo das respostas individuais era parte prevista para aula, na qual os estudantes colocavam alguns pensamentos incoerentes em xeque a partir de boas perguntas feitas pelo professor ou pesquisador.

Em sua proposição do estudo de tabelas, foi indicado que estas servem para observação de proporção e equivalência. Ao conversar a respeito com uma das crianças que se utilizou de tabelas para resolução de uma situação problema, ela relata que as tabelas servem para *comparar* e para *fazer matemática*. Ressalta-se que nenhuma instrução direta lhe fora dada sobre como resolver o problema proposto, no entanto ao longo de dois anos sua turma foi exposta a uma diversidade de situações em que as tabelas foram utilizadas de modo que ela se apropriou também deste instrumento para comparar (mostrar a solução de um problema) e fazer matemática (resolver um problema).

> Ainda que suas experiências com tabelas de dados sejam poucas, as crianças de 2ª e 3ª séries com as quais trabalhamos desenvolveram noções tabulares muito sofisticadas [...] Elas constroem tabelas de dados que fazem sentido e revelam o funcionamento de sua lógica a respeito do problema em questão, e elas organizam e representam adequadamente a situação-problema (BRIZUELA, 2006 p. 96).

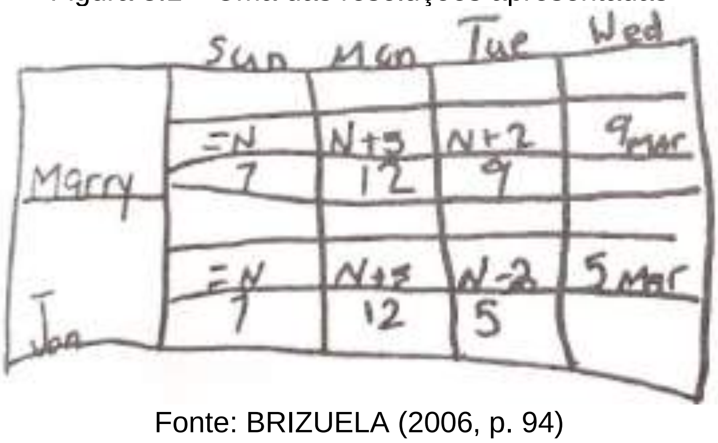
Para ilustrar a pesquisa desenvolvida, iremos observar a seguir uma das situações problema proposta aos estudantes após cerca de 1 ano e meio do andamento do projeto e a maneira como uma das crianças a resolveu:

A situação problema:

> Mary e John, cada um deles tem um saco com bolas de gude.
> No domingo, ambos tinham a mesma quantidade de bolas de gude em seus sacos.
> Na segunda-feira, eles jogaram bola de gude com os amigos na escola, e cada um ganhou 5 bolas de gude.
> a. Mary tem mais bolas de gude do que John?
> b. John tem mais bolas de gude do que Mary?
> c. Eles têm a mesma quantidade?
> d. Como você sabe?
>
> Na terça-feira, eles jogaram outra vez bola de gude na escola. Dessa vez, Mary perdeu 3 bolas, e John 7.
> a. Mary ainda tem a mesma quantidade que John de bolinhas de gude?
> b. Como você sabe?
> c. Qual é a diferença entre as duas quantidades?
>
> Na quarta-feira, Mary abriu seu saco e descobriu que tinha 9 bolas de gude dentro dele.
> a. Quantas bolas de gude cada um deles tinha no domingo?
> b. Quantas bolas de gude John acabou tendo em seu saco na quarta-feira?
>
> Mostre em uma tabela o que aconteceu de domingo até quarta-feira.
>
> (BRIZUELA, 2006, p. 93)

A resolução:

Figura 3.1 – Uma das resoluções apresentadas



Fonte: BRIZUELA (2006, p. 94)

Os resultados alcançados dão amparo para conclusões referentes à introdução do Pensamento Algébrico desde cedo às crianças de que

> [...] embora as notações [...] não sejam notações algébricas convencionais, elas realmente constituem uma internalização de uma notação convencional aceita no contexto de sua sala de aula, e a gradual apropriação dessas

> notações apoia e desenvolve o seu raciocínio algébrico (BRIZUELA, 2006, p.81).

Por meio dessa solução é possível observar o nível de abstração que as crianças conseguem chegar na 3ª série por meio de um trabalho intencional, que incentive e valorize o uso de estratégias variadas e o confronto de ideias, ampliando seus repertórios.

3.3 ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES METODOLÓGICAS DE CANAVARRO PARA O TRABALHO COM O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO FUNDAMENTAL

A Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Lisboa, Ana Paula Canavarro, vice-presidente da sociedade portuguesa de investigação em educação matemática, tem um amplo currículo voltado a pesquisas referentes a educação e ensino de Matemática, sendo alguns temas de seu interesse o currículo de Matemática e a formação inicial do professor.

No artigo “O Pensamento Algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos”, Canavarro busca explicitar o que é o Pensamento Algébrico e dar luz às ações de professores do ensino fundamental que o estão trabalhando. Tais professores fazem parte do programa de formação contínua em Matemática da universidade de Évora, na qual a pesquisadora, dentre outras funções, atua como diretora do mestrado em ensino de Matemática.

A pesquisadora defende a importância de se possibilitar as múltiplas representações (convencionais e não convencionais) para a apropriação do conhecimento, além de uma *cultura de sala de aula* que viabilize a discussão, o confronto de ideias e a argumentação para a construção coletiva de generalizações. Ela enfatiza duas vertentes do Pensamento Algébrico em sua abordagem: a da aritmética generalizada e a do pensamento funcional, que, de acordo com Blanton e Kaput (2005), são as mais comuns no ensino elementar.

A aritmética generalizada está relacionada a olhar para as propriedades, operações e relações que podem ser estabelecidas na Aritmética de maneira mais geral, a ideia fundamental de equivalência é o destaque dessa vertente assim como as aprendizagens que corroboram com a ideia de equação. Dessa maneira observar que adição de números distintos podem levar a um mesmo resultado e que na adição de um número par com um número ímpar sempre se obtém como resultado um número ímpar, são ações que trabalham essa vertente. O pensamento funcional se refere às situações que corroboram com o aprendizado de funções, desta maneira são destaques do trabalho a partir dessa vertente: a observação de sequências, a descrição do comportamento destas, a previsibilidade do que vai acontecer com os termos a partir de generalizações estabelecidas, entre outros.

A abordagem estudada prevê a proposição aos estudantes, que normalmente estão em grupos, de situações problemas, a liberdade de escolha de estratégia de resolução, o registro desta e a posterior apresentação e discussão no coletivo da sala para verificação da resolução, sistematização das respostas e para aumento de repertório da turma. O que acaba revelando, entre outras coisas, que não existe um único caminho para se chegar às respostas em Matemática.

Para possibilitar uma maior compreensão das proposições trabalhadas com estes estudantes, iremos compartilhar resumidamente alguns episódios de sala de aula cujo foco é o desenvolvimento do Pensamento Algébrico:

<u>1º episódio</u>

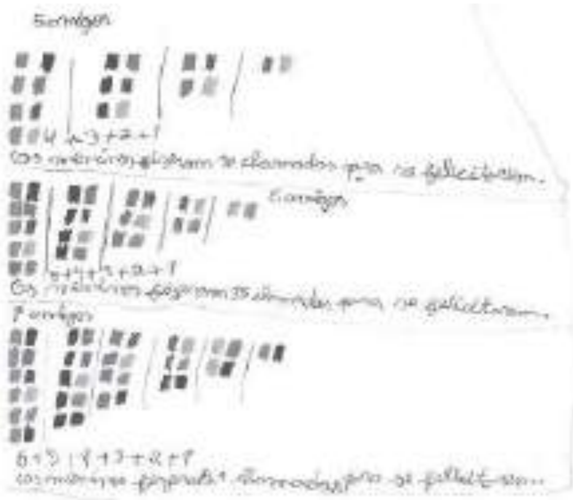
Situação proposta a estudantes do 2º e 3º ano:

> Quantos telefonemas?
> Cinco alunos ganharam um concurso. Quando souberam da notícia, telefonaram uns aos outros a felicitarem-se. Descobre quantas chamadas tiveram que fazer os cinco amigos para se felicitarem todos entre si...
> E se fossem seis amigos, quantas chamadas fariam?
> E se fossem sete amigos, quantas chamadas fariam?
> Consegues descobrir alguma regra para qualquer número de amigos?
> (CANAVARRO, 2007, p. 82)

Algumas soluções apresentadas pelos grupos:

Solução 1 - Cada retângulo colorido representa um dos amigos envolvidos na situação:

Figura 3.2 – Solução 1



Fonte: CANAVARRO (2007, p. 83)

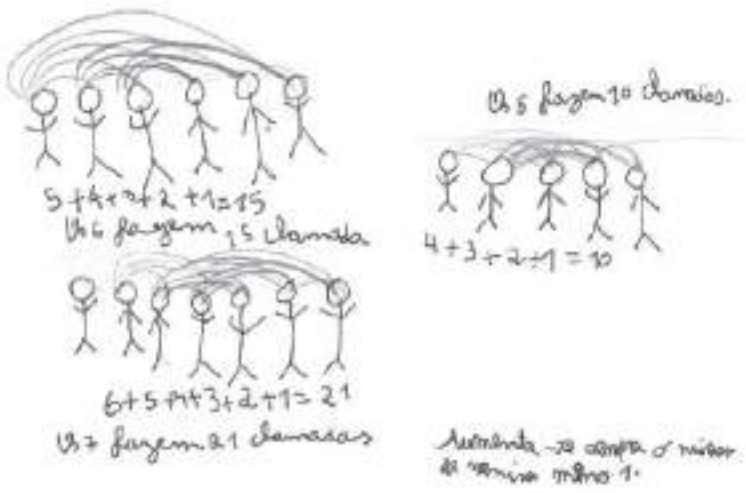
Solução 2 - Aqui foram dados nomes fictícios aos amigos.

Figura 3.3 – Solução 2

Fonte: CANAVARRO (2007, p. 84)

Solução 3 – Cada arco representa uma chamada realizada.

Figura 3.4 – Solução 3



Fonte: CANAVARRO (2007, p. 85)

Após a explanação das resoluções a professora propôs aos estudantes que pensassem numa generalização, sendo um primeiro passo para isso a construção da tabela a seguir, com base na regra apresentada pelo último grupo de que para se descobrir o próximo termo “aumenta-se sempre o número de meninos menos 1”:

Tabela 3.1 – Número de chamadas segundo o número de amigos

N.º de amigos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º de chamadas	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Fonte: CANAVARRO (2007, p. 85)

O grupo foi conduzido pela professora a buscar uma generalização com base em todas as suas observações, de modo que concluíram após problematizações colocadas por ela que:

> Existe uma regra para descobrir o número de chamadas feitas por um qualquer número de alunos, basta para isso juntar todos os números partindo do número um até chegarmos ao número anterior ao número de alunos (CANAVARRO, 2007, p. 86).

Esta situação, brevemente ilustrada, para além de nos possibilitar a ideia do trabalho proposto, nos possibilita o vislumbre de quantos aprendizados foram articulados. Os estudantes, utilizando-se de esquemas diversos, como tabelas, desenhos, cores, escrita, conseguiram identificar as estruturas matemáticas envolvidas na situação, estabelecer relações numéricas entre as variáveis, generalizar e expressar regras com base em seus registros.

Segundo a autora as tarefas em Matemática são uma boa oportunidade para o ensino do Pensamento Algébrico. Ela traz a recomendação de que se algebrize a Aritmética, transformando problemas de resposta única em oportunidades para a investigação de regularidades, levantamento de conjecturas, generalizações e sua explicitação e justificação. Sinaliza que as situações problema e de investigação são terreno fértil para o estabelecimento do Pensamento Algébrico. Ela ilustra tais aspectos com uma atividade de investigação com base na tabuada proposta aos estudantes do 3º ano (que até então conheciam as tabuadas até a do 5).

2º episódio

Em síntese esta tarefa propõe aos estudantes a observação da adição entre linhas distintas de uma mesma tabuada com a finalidade de apropriação da regra distributiva da multiplicação em relação à adição.

Figura 3.5 – Tarefa utilizada no 2º episódio

E se adicionares duas linhas da tabuada?

$1 \times 3 = 3$
$2 \times 3 = 6$
$3 \times 3 = 9$
$4 \times 3 = 12$
$5 \times 3 = 15$
$6 \times 3 = 18$
$7 \times 3 = 21$
$8 \times 3 = 24$
$9 \times 3 = 27$
$10 \times 3 = 30$

Já conheces muitas tabuadas. Talvez as saibas todas de cor... Mas talvez não tenhas reparado que há muitas coisas que podemos descobrir nas tabuadas...

1. Vejamos um exemplo na tabuada do 3...

a) Escolhe a segunda linha **2 × 3 = 6**
b) Escolhe a quinta linha **5 × 3 = 15**
c) Adiciona os números relativos à ordem das linhas: 2 + 5 = 7
d) Repara na sétima linha da tabuada: 7 × 3 = **21**.

Tem alguma coisa a ver com a segunda e a quinta?
Que relações observas entre os números destas três linhas da tabuada?

2. Experimenta um outro exemplo na tabuada do 3...

a) Escolhe agora tu uma linha desta tabuada...
b) Escolhe uma outra linha desta tabuada....
c) Adiciona os números relativos à ordem das linhas.
d) Repara na linha com o número obtido na alínea anterior. Que relações observas entre os números destas três linhas da tabuada?

3. Com certeza já tens uma conjectura...

a) Qual é a tua conjectura acerca do que se passa nos dois exemplos anteriores?
b) Testa-a com outros exemplos de linhas à tua escolha (podes repetir linhas, por exemplo, linha 4 e linha 4 para comparar com linha 8)
c) A tua conjectura é sempre verdadeira? Porquê? Como podes justificá-la?

4. Será que a tua conjectura é geral?

a) E se em vez da tabuada do 3 experimentares agora com outra tabuada? Será que se passa o mesmo? Experimenta e explica as tuas conclusões.

Fonte: CANAVARRO (2007, p. 97-98)

A professora conduziu de maneira mais generalizada o primeiro item da atividade, problematizando as observações e sistematizando algumas conclusões a fim de que os estudantes compreendessem a análise que deveria ser feita. Para dar sequência a atividade os estudantes foram agrupados e lhes foram dadas tabuadas do 3 impressas, recomendando que eles cortassem as linhas a fim de facilitar o processo de observação. Após mais um momento coletivo de trocas das ideias observadas, a professora distribui a cada dois grupos uma tabuada diferente (do 2, 4 e do 5) provocando os estudantes por meio do questionamento de que a regularidade observada seja específica para a tabuada do 3 ou se acreditam que ocorra com as demais.

Suas novas observações são compartilhadas e uma primeira conjectura levantada, de que “A soma das 2 linhas é igual ao resultado da 3.ª linha” (CANAVARRO, 2007, p. 101) - destaque para a generalidade expressa pela frase que mostra que os estudantes já não enxergam a nova regra aprendida presa a uma tabuada específica.

Os grupos se apropriaram de tal maneira da nova regra em aprendizado que começaram a já utilizá-la para justificar suas observações, como foi o caso de um grupo que, apesar da indicação inicial da professora de que escolhessem linhas da tabuada cuja soma não ultrapassasse a ordem das dezenas, escolheram as linhas do 7 e do 5 e para concluir sua observação construíram a linha do 12 a partir das linhas do 10 e do 2.

Por fim uma nova generalização é elaborada para descrever o aprendizado recém construído de que “Numa tabuada, se juntarmos duas linhas, observamos que vai dar uma terceira linha da tabuada e essa terceira linha é a que começa com o número que é a soma dos outros dois” (CANAVARRO, 2007, p. 102).

A professora busca justificar a pertinência de tal generalização olhando para a multiplicação como adição sucessiva de parcelas iguais. A conclusão da aula se dá aos estudantes com a revelação pela professora de que eles irão construir sozinhos, com base no que acabaram de aprender, as demais tabuadas.

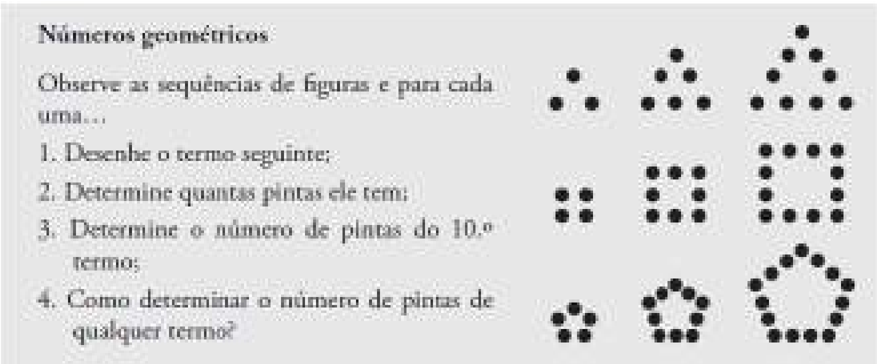
As ações explícitas e o cuidado metodológico da professora conduzem os estudantes ao Pensamento Algébrico. Ela propôs generalizações com grau progressivamente maior de abrangência. Iniciou com um caso particular e conduziu a criação de uma série de outros por parte dos estudantes possibilitando a eles a familiarização com a situação e a convicção de sua realidade, por não serem verificadas como verdadeiras apenas situações conduzidas e ilustradas pela professora. Ampliou as possibilidades e a convicção dos estudantes ao explorar outros contextos (as outras tabuadas). E procurou deixar sempre clara a intencionalidade do momento que estavam vivenciando, seja por meio de sua explicitação, seja por meio do convite a investigação, tornando os estudantes conscientes das fases de seu aprendizado ao longo de toda a proposta. Por fim, ela se preocupou a todo o tempo em focar os estudantes na estrutura das expressões numéricas escritas e não apenas nos resultados, o que foi essencial para fazer surgir a propriedade distributiva. “Tornar visíveis as estruturas e analisá-las é, precisamente, um dos cuidados a ter quando se pretende desenvolver nos alunos o Pensamento Algébrico” (CANAVARRO, 2007, p. 103).

O exemplo que acabamos de compartilhar trata a respeito da vertente de aritmética generalizada, uma das vertentes do Pensamento Algébrico, conforme mencionado anteriormente. Iremos olhar agora para um exemplo de ação realizada com estudantes do 2º ano que explora uma outra de suas vertentes, a do pensamento funcional.

<u>3º episódio</u>

A tarefa:

Figura 3.6 – Tarefa utilizada no 3º episódio

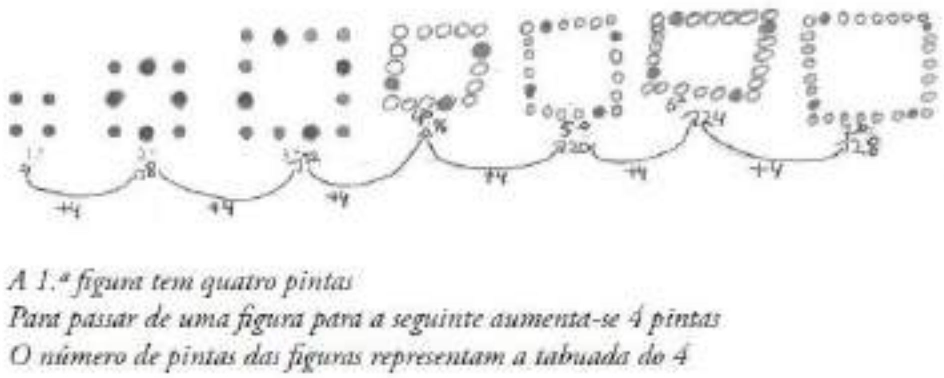


Fonte: CANAVARRO (2007, p. 103)

Os estudantes foram conduzidos para o estudo desta tarefa utilizando como apoio para suas observações e registro, materiais manipuláveis circulares e folha A3. As três primeiras questões foram realizadas em duplas de maneira mais autônoma. O passo seguinte foi direcionado pela professora de maneira coletiva ouvindo as duplas acerca de suas observações com relação a caracterização das sequências. Observou-se que não houve espaço para o registro, por nenhuma das duplas, do décimo termo, de maneira que, aparentemente, eles chegaram ao resultado de maneira recursiva por adições sucessivas.

Os estudantes reconheceram a sequência numérica que descreve a ascendência da quantidade de bolinhas das figuras, sendo que alguns deles foram capazes de associar suas observações às tabuadas. Conforme eles apresentavam seus registros, compartilhavam também as conclusões a que chegaram referentes às regularidades observadas, como se pode observar neste exemplo:

Figura 3.7 – Exemplo de parte da resolução dos estudantes



Fonte: (CANAVARRO, 2007, p. 104)

Após o registro direcionado pela professora de conclusões gerais, como a seguinte: “O quadrado tem 4 lados e de um quadrado para o seguinte aumentamos sempre 4 pintas”, foi proposto por ela a generalização de uma regra para encontrar o número de *pintas* de um termo desconhecido. De maneira que se chegou à seguinte conclusão: “Para descobrimos quantas pintas leva qualquer figura, basta multiplicar o número do termo que se quer por 3, 4 ou 5 consoante seja um triângulo, quadrado ou pentágono” (CANAVARRO, 2007, p. 104).

Os aspectos que contribuíram para a apropriação do Pensamento Algébrico que se destacaram nessa atividade foram: haver um registro visível da posição de cada termo e do número de bolinhas facilitando a relação das variáveis implícitas; haver a indicação por meio de arcos da quantidade (fixa) de bolinhas que aumenta a cada nova figura possibilitando a visualização da estrutura matemática presente; o destaque das bolinhas aumentando em cada lado da figura, facilitando a generalização; a observação de que a lei de formação pode ser relacionada com a tabuada, facilitando o pensamento em um termo geral e, por fim, a simplicidade e clareza da regra, facilmente relacionada aos três padrões, ganhando um grau de generalização ainda maior (CANAVARRO, 2007, p. 105-106).

Estes três episódios de sala de aula ilustram ações que conduzem a apropriação do Pensamento Algébrico, eles trazem ao professor a indicação não apenas de atividades, mas de toda uma postura metodológica que prevê o planejamento da atividade, considerando os recursos necessários para sua boa condução, a problematização das etapas para que ocorra o envolvimento do estudante na apropriação do conhecimento e a sistematização coletiva dos saberes colocados em jogo.

As múltiplas representações é um dos destaques deste trabalho:

> A possibilidade de utilização de diversas formas de representação amplia as hipóteses de os alunos mais jovens conseguirem organizar o seu pensamento, para além de facilitar a sua comunicação, nomeadamente ao considerarem-se as representações não convencionais (CANAVARRO, 2007, p. 106).

Pois torna possível ao estudante aproximar-se das situações de maneira que lhe faça sentido, facilitando a condução do raciocínio e expressão do pensamento. A utilização destes esquemas em mais do que um caso particular possibilita a visualização dos padrões proporcionando a descoberta da regularidade e o pensamento em casos gerais – a generalização.

Chamamos a atenção mais uma vez para a importância da linguagem própria matemática. Os esquemas possibilitam a aproximação e o raciocínio sobre as situações propostas, a sistematização por meio da representação convencional (notação algébrica, gráficos, tabelas, linguagem natural) enriquece o olhar e o aprendizado do estudante e também deve ser ensinada, pois torna universal a comunicação matemática, possibilitando a todos a compreensão do que se concluiu e do que se quer dizer. A linguagem natural é o primeiro recurso que pode ser apresentado aos estudantes, como vimos nas conclusões dos episódios de sala de aula. Ela pode, aos poucos, ir se aproximando das representações por meio de letras, utilizando ao longo do caminho as abreviações, tal como vimos no desenvolvimento histórico do conhecimento algébrico de maneira que se passa de álgebra retórica para a sincopada para finalmente chegar na simbólica – notação algébrica. As tabelas têm sua vez para sintetizar as informações e possibilitar a visualização das regularidades, favorecendo o pensamento funcional. Os gráficos cartesianos de situações significativas para os estudantes favorecem uma visualização mais contundente da variação das quantidades “para além de permitirem completar e clarificar aquilo que as tabelas revelam, são um contexto propício para o aprofundamento da compreensão da variação entre as duas variáveis representadas nos eixos” (CANAVARRO, 2007, p. 107).

O papel do professor está para além da escolha das tarefas e da instigação ao uso de estratégias variadas. “Ajudar os alunos a construir um repertório de ferramentas intelectuais que os apoiem no desenvolvimento do Pensamento Algébrico é uma importante função que o professor deve assumir” (CANAVARRO, 2007, p. 108). Ele tem a missão de auxiliar o estudante na construção de um repertório matemático para pensar algebricamente, de modo que cabe a ele a apresentação de estruturas matemáticas, como as retas numéricas, as tabelas e os gráficos, sendo utilizados para resolução de problemas; o ensino de como lidar com processos matemáticos como recolher, registrar, representar e organizar dados; propiciar um ambiente no qual os estudantes se sintam a vontade para comunicar e argumentar suas hipóteses e conclusões discutindo resultados parciais e conclusões.

> [...] o desenvolvimento do Pensamento Algébrico se coaduna bem com uma organização de aula em que os alunos têm oportunidade de trabalhar

> autonomamente sobre a tarefa proposta e que posteriormente confrontam as suas produções, retirando daí aprendizagens colectivas e crescendo para o apurar de generalizações amplas colectivamente construídas (CANAVARRO, 2007, p. 111).

Deste modo as ações do professor devem valorizar o raciocínio do estudante como ponto de partida, prevendo, em seu planejamento de aula, tempo para o trabalho autônomo nos agrupamentos e para a discussão coletiva, conduzindo, por meio de boas perguntas, a sistematização das conclusões. É importante que o professor promova a "síntese colectiva da generalização descoberta, quer para a clarificar, quer para a ampliar, realçando o seu valor como conhecimento a integrar e usar posteriormente" (CANAVARRO, 2007, p. 112).

3.4 CONCLUSÕES COM BASE NOS ESTUDOS COMPARTILHADOS

Nas pesquisas citadas anteriormente podemos observar a introdução do Pensamento Algébrico desde as séries iniciais e o quanto é positivo que os conceitos sejam claramente desenvolvidos desde cedo, destacando-se o significado do sinal de igual como ideia de equivalência, dado que no trabalho em separado da Aritmética cria-se a falsa conclusão de que este divide uma operação de um resultado. Além disso observa-se o incentivo às representações individuais, ou seja, a valorização das diferentes estratégias de resolução por parte dos estudantes de modo que o entendimento das situações problemas supere as operações envolvidas em sua resolução.

Sendo assim, o trabalho com Pensamento Algébrico na perspectiva apresentada por este estudo, aparece não como antecipação de conhecimentos trabalhados tradicionalmente com os estudantes nos anos finais do ensino fundamental, mas como um preparo para a apropriação destes conceitos, tendo caráter de construção e compreensão das ideias envolvidas.

Os episódios compartilhados na seção 3.3 permitem a visualização de algumas habilidades da BNCC em jogo. Como no 1º episódio, as habilidades:

(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos e *(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras*. A habilidade *(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença*, no 2º episódio. E no 3º episódio: *(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes*. Contudo destacamos que não é a intenção deste estudo esgotar as possibilidades de trabalho com cada habilidade, mas clarificar ao professor o conceito de Pensamento Algébrico e modos de o trabalhar nos anos iniciais do ensino fundamental, de maneira que ele possa ser capaz de planejar e conduzir ações que corroborem com o aprendizado de seus estudantes.

Nota-se que para além de sugestões de tarefas, destacam-se as indicações de uma nova postura metodológica por parte do professor. Sendo necessário que preveja em seu planejamento tempo e direcionamento para o trabalho autônomo dos agrupamentos de estudantes, de maneira que a resolução das situações problema propostas sejam pensadas por eles, podendo eles utilizarem estratégias pessoais para descrever e responder às situações colocadas. É dever do professor munir os estudantes de ferramentas matemáticas que os auxiliem a pensar sobre as situações propostas, utilizando pertinentemente em suas aulas tabelas, retas numeradas, gráficos, entre outros. O professor deve partir de situações genéricas mais simples, tendo sempre clareza de intencionalidade de suas proposições, as conduzindo de maneira que leve os estudantes as conclusões por ele planejadas. E a sistematização dos saberes propostos para o aprendizado dos estudantes seja feita no coletivo.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim como Coelho e Aguiar (2018):

> Acreditamos na ideia de que o pensamento abstrato, para emergir dentre os cidadãos, precisa de um meio para se desenvolver e ser aprendido. Nesse sentido, e na escola em especial, o ensino de Matemática possui um papel relevante. Faz parte das habilidades matemáticas auxiliar os estudantes a desenvolverem tais ferramentas para a sua vida em sociedade. Em especial, a Álgebra pode corroborar se, em seu ensino, o enfoque for o de desenvolver no estudante um pensamento que o auxilie na busca de padrões e analogias quando enfrentar problemas cotidianos (COELHO; AGUIAR, 2018, p.177-178).

Conduzir o aprendizado da Álgebra, unidade temática que está atrelada a um grau amplo de abstração, não é tarefa fácil. Vimos nos indicativos das habilidades da BNCC um trabalho paulatino que se inicia no 1º ano do ensino fundamental, indicando um olhar intencional para as sequências, dando um primeiro passo para a capacidade de se observar regularidades; mais tarde (no terceiro ano), as relações de equivalência passam a ser indicadas, conferindo ao professor a missão de trabalhar o sinal de igual em sua totalidade de significados desde cedo.

Nos aproximarmos da história da Álgebra nos permitiu vislumbrar a essência de seu surgimento e evolução, nos dando pistas de como possibilitar a apropriação deste conceito por nossos estudantes de maneira significativa e nos revelando o quanto é importante um trabalho fluido desta unidade temática que possibilite o uso de estratégias pessoais e perpasse a observação de regularidades e a busca por generalizações. Como vimos, a criação de uma notação única aparece como uma das últimas instâncias. Pensando-se em um porquê de se aprender Álgebra, amparado na resolução de problemas, concluímos que é bastante conveniente que a preocupação com a manipulação de expressões não tome lugar à frente do desenvolvimento de um raciocínio algébrico.

Nossa recorrência às pesquisas científicas indicam um trabalho com ênfase na metodologia, propondo situações matemáticas para os estudantes pensarem a respeito sem antes lhes dar uma receita, e antes também de haver o olhar viciado para regras que representem as situações de maneira geral sem ser necessário parar para pensar. A descrição da situação proposta pode ser feita pelo estudante, a priori, da maneira que o deixar mais confortável, assim como a sistematização inicial da ocorrência, sendo o mais importante nesse momento o entendimento do que está ocorrendo.

Em nosso estudo, foram compartilhados saberes que se espera que os estudantes alcancem, um referencial histórico de construção de aprendizagens e abordagens metodológicas em prol do aprendizado do Pensamento Algébrico. Independente da escolha do caminho a ser trilhado, o que se destaca é a necessidade de possibilitar ao estudante esse olhar e pensar a respeito das situações por meio de suas estratégias pessoais, tendo, desde cedo, o significado completo de aspectos matemáticos clarificados. A ênfase deve ser a compreensão das situações.

O professor tem um papel muito importante nessa abordagem, o preparo e direcionamento desta prevê, dentre outras coisas, tempo para o trabalho autônomo nos agrupamentos, o uso intencional de ferramentas matemáticas para instrumentalização dos estudantes, ênfase nos processos matemáticos, como coleta e organização de dados observados, e a sistematização coletiva dos saberes.

O que requer uma quebra de paradigma, como nos diz Kaput (2008): “A algebrização da atividade da aula envolve a desconstrução de longos anos de prática de ensino que não se baseou de forma séria no raciocínio dos alunos, incluindo os diversos processos de representação e simbolização que estes usam” (KAPUT, 2008, p. 363), na qual um dos destaques é a problematização ao longo das proposições e a escuta atenta por parte do professor:

> Expressar a generalização significa acomodá-la numa linguagem, seja uma linguagem formal, ou, para crianças mais jovens, em entoações e gestos. No caso de alunos jovens, identificar a expressão da generalidade ou a tentativa de que uma declaração acerca de um caso particular seja tomada como geral pode requerer o ouvido atento e qualificado do professor que sabe como ouvir cuidadosamente as crianças (KAPUT, 1999, p. 6).

Essa nova postura que se espera por parte do professor está relacionada a crença deste de que seus estudantes sejam capazes de construir conhecimento matemático, assim como numa crença em si mesmo desta capacidade:

> A aposta por parte do professor no pensamento algébrico implica, talvez sobretudo, uma aposta no raciocínio dos alunos e um acreditar na possibilidade destes construírem conhecimento matemático — atividade na qual o professor precisa também de se envolver. A necessidade do desenvolvimento de “hábitos da mente” não pode incidir apenas nos alunos — eles devem necessariamente instalar-se e transbordar dos professores (CANAVARRO, 2007, p. 113).

E requer um novo olhar para o seu planejamento de maneira que mude “a relação com o seu repositório de materiais para o ensino, de consumidor e aplicador para transformador ativo” (KAPUT, 2008).

Além desses pontos elencados a cultura de sala de aula também precisaria ser revista, de modo que o apoio no exemplo dado pelo professor para posterior treinamento do que foi ensinado deva ser deixado de lado e o levantamento de hipóteses, discussões de ideias e sistematização coletiva de aprendizados tome lugar:

> As práticas de sala de aula centradas no modelo de explicação por parte do professor seguida de aplicação e treino por parte dos alunos, não são um contexto favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico. A condução de aulas onde haja lugar ao estabelecimento de conjecturas, à sua discussão, confronto de ideias, argumentação, construção de generalizações colectivas, é muito mais complexa e exigente para o professor (CANAVARRO, 2007, p. 114).

Podemos dizer assim que as indicações das pesquisas científicas para o trabalho do professor são voltadas para sua postura metodológica, primando pelo trabalho em grupo, resolução de problemas[13] e a condução de atividades que

[13] Para saber mais sobre a metodologia do trabalho em grupo e a resolução de problemas indicamos, respectivamente, a leitura dos artigos: FATARELI, Elton Fabrino et al. Método cooperativo de aprendizagem jigsaw no ensino de cinética química. Química Nova na Escola, v. 32, n. 3, p. 161-168, 2010 e ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

abordem a aritmética generalizada e o pensamento funcional de modo que o estudante seja coautor de seu aprendizado.

Tendo feito estas considerações esperamos que este trabalho contribua de fato com as ações do professor em prol do aprendizado de Álgebra proposto pela BNCC na perspectiva do Pensamento Algébrico. Destacamos também que foram apresentados fundamentação teórica e alguns exemplos, cabendo ao professor pensar em situações problemas e desafios que se adequem, estimulem e contribuam com o aprendizado de seus estudantes.

REFERÊNCIAS

BLANTON, M; KAPUT, J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning.** Journal for Research in Mathematics Education: 2005. Vol. 36. Nº 5, p. 412–446. Disponível em: https://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf. Acesso em: 02 nov. 2019.

BRASIL. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília: Centro de Documentação e Informação (CEDI), 2013. 464 p. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/Constituicoes_Brasileiras/constituicao1988.html. Acesso em: 03 fev. 2021.

_______. Lei nº 9394, de 23 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1996)**. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1996/lei-9394-20-dezembro-1996-362578-norma-pl.html. Acesso em: 03 fev. 2021.

_______. Lei nº 13.005/2014, de 25 de junho de 2014**. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências.** Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2014/Lei/L13005.htm. Acesso em: 03 fev. 2021.

_______. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 16 jun. 2019.

_______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança: Explorando notações.** Trad. de Veronese, M. A. V. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CAJORI, F. **A History of mathematical notations** (Vol. 2). Chicago: Open Court, 1929.

CANAVARRO, A. P. **O Pensamento Algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.** Quadrante, v. 8, n. 2, p. 81-118, 2007.

CHAVANTE, E. R. **Convergências: Matemática, 9º ano: Anos finais: Ensino fundamental.** São Paulo: Edições SM, 2015.

COELHO, F. U. AGUIAR, M. **A história da Álgebra e o Pensamento Algébrico: Correlações com o ensino**. 2018**.** Disponível em:

http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300171. Acesso em: 03 fev. 2021.

EQUIPA DO PFCM DA ESE DE SETÚBAL. **Pensamento Algébrico nos primeiros anos de escolaridade.** Setúbal, Portugal, 2008/2009. Disponível em: http://projectos.ese.ips.pt/pfcm/wp-content/uploads/2010/02/Texto-Pensamento-Algébrico-1.ºs-anos.pdf. Acesso em: 02 jun. 2019.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. 2ª Reimp. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2007.

GUELLI, O. **A Regra da Falsa Posição**. RPM 15, São Paulo, SP. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/15/4.htm. Acesso em 15 jun. 2019.

KAPUT, J. **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

_______. **Teaching and learning a new Algebra with understanding**. 1999. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf. Acesso em 03 fev. 2021.

KIERAN, C. **Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?** The Mathematics Educator, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

_______. **Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels**. Quadrante, v. 16, n. 1, p. 5-26, 2007.

_______. **The changing face of school algebra.** In CHO, S. J (Ed.). 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures (p. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales, 1996.

MACHADO, N. J. **Sementes 1. Matemática – Ideias Fundamentais.** 2015. Disponível em: https://www.nilsonjosemachado.net/sementes-1-matematica-ideias-fundamentais. Acesso em: 16 dez. 2020.

NUNES, V. F. R. **Quais são os três famosos problemas da antiguidade?** Disponível em: https://www.matematica.pt/faq/problemas-famosos-antigos.php. Acesso em: 18 dez. de 2020.

GOOGLE. **Álgebra**. Definições de Oxford Languages. 2021. Disponível em: https://www.google.com/search?q=defini%C3%A7%C3%A3o+de+%C3%A1lgebra&oq=defini%C3%A7%C3%A3o+de+%C3%A1lgebra&aqs=chrome..69i57j0j0i22i30l3.7348j1j9&client=ms-android-motorola-rev2&sourceid=chrome-mobile&ie=UTF-8. Acesso em: 05 fev. 2021.

PEANO, G. **Arithmetices principia, nova methodo exposita** (Os princípios da aritmética, apresentados por um novo método). Roma: Fratres Bocca, 1889.

ROQUE, T. **História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** 4ª Reimp. Rio de Janeiro: Zahar, 2017.

VERSCHAFF L. GREER, B. DE CORTE, E. **Whole number concepts and operations.** In F. K. Lester (Ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (p. 557–628). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing, 2007.

APÊNDICE A – Explicação do método de inversão aplicado à situação compartilhada na página 33 do Capítulo 2.

Vamos relembrar a situação:

> Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendeis o método de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de ¾ do produto, depois dividido por 7, diminuído de 1/3 do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10 resulta no número 2? (EVES, 2007, p.255).

Para detalhar sua resolução iremos olhar para a situação problema do final para o começo trecho por trecho e em seguida aplicar as operações inversas.

i) [...] adição de 8 e divisão por 10 resulta no número 2?

Multiplicação do resultado (2) por 10 e a subtração de 8 deste chegando-se ao resultado parcial 12:

$$2.10 - 8 = 12$$

ii) [...] pela extração da raiz quadrada [...]?

Elevamos este resultado parcial ao quadrado:

$$12^2 = 144$$

iii) [...] **diminuído de 52,** [...]?

Acrescentamos 52:

$$144 + 52 = 196$$

iv) [...] **multiplicado por si mesmo,** [...]?

Extraímos a raiz quadrada:

$$\sqrt{196} = 14$$

v) [...] **diminuído de 1/3 do quociente,** [...]?

Tínhamos uma quantidade desconhecida e dela tiramos 1/3 chegando-se a 14. Então podemos concluir que 14 é 2/3 da quantidade desconhecida. Logo, aplicar a operação inversa, neste caso, equivale a dividir 14 por 2/3. Que, por sua vez, equivale a multiplicar 14 por 3/2:

$$14.\frac{3}{2} = 21$$

vi) [...] depois dividido por 7, [...]?

Multiplicamos por 7:

$$21.7 = 147$$

vii) [...] **depois acrescido de ¾ do produto,** [...]?

Pensando-se de maneira análoga à etapa v), concluímos que se a uma quantidade desconhecida foram acrescidos ¾ de si mesma, a operação realizada é equivalente a fazer 7/4 da quantidade desconhecida. Logo a operação inversa, neste caso, é dividir o resultado parcial por 7/4, que é equivalente a multiplicá-lo por 4/7:

$$147.\frac{4}{7} = 84$$

viii) [...] qual é o número que multiplicado por 3, [...]?

Dividimos por 3:

$84{:}\,3 = 28$, que é o número procurado.