



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO  
CÂMPUS ITAPETININGA

ELIANA LOURENÇO DOS SANTOS

A IMPORTÂNCIA DA INTRODUÇÃO E ENSINO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO

ITAPETININGA-SP  
2024

ELIANA LOURENÇO DOS SANTOS

A IMPORTÂNCIA DA INTRODUÇÃO E ENSINO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Itapetininga, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Matheus Moreira Costa

ITAPETININGA-SP  
2024

Santos, Eliana Lourenço dos  
S237i A importância da introdução e ensino de vetores no Ensino Médio /  
Eliana Lourenço dos Santos – Itapetininga, 2024.  
47 f. : il.

Orientador: Matheus Moreira Costa  
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo,  
Campus Itapetininga, Itapetininga, 2024.

1. Geometria analítica. 2. Matemática (Ensino médio). 3. Álgebra  
vetorial. I. Costa, Matheus Moreira. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Willian Eduardo Righini de Souza –  
CRB 8/9594 - com informações fornecidas pelo autor

ATA N.º 15/2024 - MAT-ITP/DAE-ITP/DRG/ITP/IFSP

### Ata de Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso

ALUNO		Nº DO PRONTUÁRIO
Eliana Lourenço dos Santos		IT300290X
TÍTULO DO TRABALHO		
A IMPORTÂNCIA DA INTRODUÇÃO E ENSINO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO.		
MEMBRO DA BANCA	PARECER	ASSINATURA
Patricia Stulp	APROVADA	Assinado digitalmente
Victor Vaz Pavani	APROVADA	Assinado digitalmente
COMENTÁRIOS		
A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo do trabalho, passou à arguição da candidata. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pela aluna.		
PARECER FINAL: ( X ) APROVADO ( ) REPROVADO		DATA DA DEFESA: 06/08/2024
ORIENTADOR	ASSINATURA	
Matheus Moreira Costa	Assinado digitalmente	
HOMOLOGAÇÃO - COORDENADOR DE CURSO	DATA	
Victor Vaz Pavani	06/08/2024	

Documento assinado digitalmente.

Documento assinado eletronicamente por:

- Matheus Moreira Costa, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 15/08/2024 17:18:48.
- Victor Vaz Pavani, COORDENADOR(A) - FUC1 - MAT-ITP, em 15/08/2024 18:32:53.
- Patricia Stulp, PROF ENS BAS TEC TECNOLOGICO-SUBSTITUTO, em 17/08/2024 19:16:04.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 06/08/2024. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifsp.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 785051  
Código de Autenticação: 9eda36ebda



## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS, que na sua infinita misericórdia me abençoou nos estudos para que pudesse chegar na etapa final desta jornada.

A minha mãe amada por sempre ficar com meu pequeno quando precisei ir para a faculdade e não pude levá-lo.

Aos meus filhos que, quando pensei em desistir, me incentivaram a continuar, já que era o último ano, demonstrando apoio e consideração.

Aos meus companheiros de jornada que sempre me ajudaram quando apareceram as dificuldades em compreender os conteúdos, sempre estavam ali para me ensinar com paciência reexplicando. Abraço especial para: Gabriel Gimenez, Leonardo Bori e William Thales.

Aos “professores orientadores”, que aceitaram a árdua missão de acompanhar na execução desse trabalho tão significativo em nossas vidas de discentes: Marcel Moro, Michele Calefe e por fim ao querido professor Matheus Costa que, conseguiu chegar até aqui comigo.

Aos professores que sempre deram uma palavra de ânimo, que acreditaram em mim, que me disseram que eu seria “capaz”, em especial ao professor Victor Vaz Pavani que, lá em fundamentos (1º semestre), quando fiquei desconcertada pelo resultado da prova substitutiva, pois havia estudado tanto, ele me disse: “Tudo bem não ter tirado uma nota alta, mas você deveria ficar feliz pois você conseguiu passar, são as pessoas que se esforçam que conseguem chegar até o final deste curso”. Agradeço ainda às professoras Michele Calefe e Aline Lagoeiro por razões muito especiais.

A todos os professores aqui mencionados e não mencionados, por nos alimentarem todas as noites com seus saberes, compartilhando informações e experiências.

A todos os servidores da “Família do IF”, sempre prontos a nos atender com carinho, com humanidade, com respeito, com diligência, procurando resolver nossos problemas referente a faculdade, seja no empréstimo de um livro, de um documento na secretária, de uma sala para estudar - servidores da CAE, nos bastidores da assistência social, no sócio-pedagógico, enfim essa grande família maravilhosa que compõem o IF.

Agradeço a todos que passaram e aos que fizeram parte da minha estadia no IF. Na verdade não tenho palavras para agradecer, mas peço a DEUS, que os recompense por todo o bem que me tenham feito, pela paciência, pelo carinho dispensado.

DEUS vos abençoe!

## EPÍGRAFE

*“ Não há nenhuma utilidade para os alunos em se construir um currículo em torno da sua experiência, para que este currículo possa ser validado e, como resultado, deixá-los sempre na mesma condição. O conhecimento poderoso é aquele que não depende das circunstâncias ou da teoria, mas sim busca contemplar o todo através de experiências adquiridas pelos estudantes na escola. Dessa forma, é necessário auxiliar na capacitação dos estudantes para que eles possam ter um desenvolvimento significativo”.*

(YOUNG, 2007, p. 1297)

## RESUMO

Este trabalho explora a importância de introduzir o estudo de vetores no ensino médio, propondo que esse conceito fundamental seja ensinado desde cedo para enriquecer o currículo matemático e facilitar a compreensão dos alunos em geometria e álgebra. A inspiração veio das dificuldades enfrentadas pela autora na disciplina de Vetores e Geometria Analítica durante a licenciatura, revelando uma lacuna significativa na preparação matemática pré-universitária. O texto revisa literatura que suporta a introdução precoce de vetores na educação, como os trabalhos de Assemany (2017), que sugere a inclusão de vetores já no ensino fundamental, demonstrando que isso oferece aos estudantes uma ferramenta adicional para resolver problemas matemáticos tradicionais de maneiras mais intuitivas. Para ilustrar a aplicabilidade dos vetores, são propostas atividades que abordam desde a determinação de pontos médios e distâncias mínimas até a verificação da colinearidade e o cálculo de áreas usando coordenadas. Essas atividades visam mostrar uma forma alternativa de resolver problemas matemáticos no ensino médio. Assim, o estudo de vetores pode acrescentar uma nova ferramenta matemática aos estudantes. Em suma, o trabalho defende uma mudança curricular que integre os vetores como parte do ensino médio, preparando melhor os alunos para futuros estudos acadêmicos em ciências exatas e matemática. A implementação dessa mudança requer planejamento cuidadoso e apoio aos educadores para garantir que todos os alunos possam se beneficiar sem se sentir sobrecarregados.

**Palavras-chave:** Vetores; Ensino Médio; Matemática; Geometria Analítica.

## ABSTRACT

This work explores the importance of introducing the study of vectors in high school, proposing that this fundamental concept be taught early on to enrich the mathematical curriculum and facilitate students' understanding in geometry and algebra. The inspiration came from the difficulties faced by the author in the subject of Vectors and Analytical Geometry during her undergraduate studies, revealing a significant gap in pre-university mathematical preparation. The text reviews literature that supports the early introduction of vectors in education, such as the work of Assemany (2017), which suggests the inclusion of vectors as early as elementary school, demonstrating that this provides students with an additional tool to solve traditional mathematical problems in more intuitive ways. To illustrate the applicability of vectors, activities are proposed that range from determining midpoints and minimum distances to verifying collinearity and calculating areas using coordinates. These activities aim to show an alternative way to solve mathematical problems in high school. Thus, the study of vectors can add a new mathematical tool for students. In summary, the paper advocates for a curricular change that integrates vectors as part of high school education, better preparing students for future academic studies in exact sciences and mathematics. The implementation of this change requires careful planning and support for educators to ensure that all students can benefit without feeling overwhelmed.

**Keywords:** Vectors; High School; Mathematics; Analytical Geometry.

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO .....	11
2.	REFERENCIAL TEÓRICO.....	16
2.1.	DEFINIÇÕES.....	16
2.1.1.	RETA ORIENTADA .....	16
2.1.2.	SEGMENTO ORIENTADO.....	16
2.1.3.	SEGMENTO NULO .....	16
2.1.4.	SEGMENTO OPOSTO .....	16
2.1.5.	MEDIDA DE UM SEGMENTO .....	17
2.1.6.	DIREÇÃO E SENTIDO .....	17
2.1.7.	SEGMENTOS EQUIPOLENTES .....	18
2.1.8.	VETOR .....	18
2.1.9.	VECTOR .....	19
2.1.10.	VETORES COLINEARES.....	19
2.1.11.	VETORES COPLANARES .....	20
2.2.	OPERAÇÕES COM VETORES .....	20
2.2.1.	ADIÇÃO DE VETORES.....	20
2.2.1.1.	REGRA DO POLÍGONO .....	20
2.2.1.2.	REGRA DO PARALELOGRAMO.....	21
2.2.1.3.	PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE VETORES .....	21
2.2.2.	SUBTRAÇÃO DE VETORES.....	22
2.2.3.	PRODUTO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL.....	22
2.2.3.1.	PROPRIEDADES DO PRODUTO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL	22
2.3.	VETORES NO PLANO .....	23
2.3.1.	DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR.....	24
2.3.2.	BASES .....	25
2.3.3.	A BASE CANÔNICA.....	25
2.3.4.	EXPRESSÃO ANALÍTICA DE UM VETOR.....	26
2.3.5.	IGUALDADES E OPERAÇÕES .....	27
2.3.5.1.	IGUALDADE DE VETORES NO PLANO .....	27
2.3.5.2.	OPERAÇÕES COM VETORES NO PLANO .....	27
2.3.6.	VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS.....	28

2.4.	VETORES NO ESPAÇO .....	29
2.4.1.	A BASE CANÔNICA DO ESPAÇO .....	29
2.4.2.	REPRESENTANDO VETORES NO ESPAÇO .....	30
2.4.3.	IGUALDADE E OPERAÇÕES .....	31
2.5.	CÁLCULO DA NORMA DE UM VETOR.....	31
2.6.	CÁLCULO DO VERSOR DE UM VETOR.....	32
2.7.	CÁLCULO DO ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES .....	33
2.8.	PRODUTO ESCALAR.....	35
2.8.1.	PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR.....	35
2.9.	PROJEÇÃO DE UM VETOR.....	35
2.10.	PRODUTO VETORIAL .....	37
2.10.1.	PROPRIEDADES DO PRODUTO VETORIAL.....	37
2.10.2.	INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO VETORIAL.....	38
2.10.3.	NORMA DO PRODUTO VETORIAL.....	38
2.11.	PRODUTO MISTO.....	38
2.11.1.	PROPRIEDADE DO PRODUTO MISTO .....	39
2.11.2.	MÓDULO DO PRODUTO MISTO.....	39
3.	PROPOSTAS DE ATIVIDADES .....	40
4.	CONCLUSÃO .....	46
5.	REFERÊNCIAS .....	47

## 1. INTRODUÇÃO

A inspiração para o referido trabalho veio das dificuldades encontradas por mim e, pelos demais colegas de classe, no segundo semestre do curso de licenciatura de matemática, especificamente na disciplina de Vetores e Geometria Analítica. Pude observar que essa dificuldade foi gerada pela grande lacuna deixada pelos anos escolares anteriores. Alunos reafirmam que, se tivesse visto vetores no ensino médio, com certeza essa disciplina não seria tão “assustadora”, mesmo no curso de Licenciatura em matemática e as dificuldades enfrentadas pela turma seria menores ou quase nula, desde a compreensão de conceito de Vetores bem como na interpretação e na resolução dos exercícios e atividades propostas em sala de aula pela professora. Partindo, desse pressuposto, através de pesquisas, descobri que muitos educadores e muitos agentes envolvidos com a educação já haviam percebido a necessidade da introdução e ensino de vetores no ensino médio e, suas pesquisas, trabalhos e propostas foram alavancas para iniciação desse trabalho.

Em virtude disso, o presente trabalho tem como objetivo ressaltar a importância do estudo e da aplicação de vetores no ensino médio desde o primeiro ano. Dentro das pesquisas feitas, observei que já há trabalhos que abordam a temática envolvendo vetores, por diferentes autores, que acreditam, não só na importância, mas também que introduzir o estudo de vetores desde o primeiro ano do ensino médio e nos demais subseqüentes, contribui para o enriquecimento curricular do aluno, para além do conhecimento. Abordar e trabalhar os conceitos de vetores e ensinar como podem ser utilizados por esses alunos, e isso independe se pretendem fazer faculdade de exatas ou não, pode mostrar a eles uma outra forma de resolver problemas matemáticos, por exemplo de geometria plana e analítica, e por muitas vezes de maneira mais simples e até de forma mais rápida, otimizando o tempo.

Dentre as minhas pesquisas, um trabalho, que considero muito importante na defesa do uso de vetores no ensino médio, é o da autora Assemany (2017). Em seu trabalho, a autora aponta que os estudos apresentados por Bittar (2013) justificam a utilização dos vetores nos programas curriculares desde o 4º ciclo do ensino fundamental, citando como exemplo, como ocorre nas escolas francesas. A referida autora mostra, através do “Registros das Representações Semióticas” de Duval, que a Geometria Vetorial se configura para o aluno como um ganho de mais uma ferramenta na resolução de problemas já conhecidos, quando é apresentada inicialmente como um ente geométrico para resolver problemas de geometria e também como um ente matemático.

Assemany (2017) , ainda aponta estudos sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de vetor. Para fundamentar a sua proposta, em trabalho de campo, a autora buscou valorizar a visão geométrica dos alunos, incentivando esse olhar aos assuntos abordados em todo o ensino médio, inclusive àqueles nos quais a interpretação tradicionalmente explorada é exclusivamente algébrica. A autora considera o ensino de vetores “como básico e primordial para conteúdos subsequentes”. e cita exemplos para demonstrar em tese sua teoria:

- A construção da representação gráfica de uma circunferência, através do conceito de módulo de vetor.
- A possibilidade de explorar a geometria euclidiana no plano cartesiano.
- A determinação da função afim a partir do estudo da equação da reta.
- A constituição da expressão algébrica de uma determinada função ou de uma cônica, a partir de sua designação mais simples, através do conceito da translação.
- A translação de gráficos de funções ou de cônicas.

Muitas vezes o aluno tem dificuldades de compreender e de resolver certas operações matemáticas pelo método tradicional e insistir na mesma metodologia, com listas exaustivas de exercícios com a mesma aplicação, pode não surtir o efeito esperado do conhecimento chegar a todos de maneira que todos, dentro de uma mesma sala de aula, tenha a autonomia e domínio deste conhecimento para resolver qualquer exercício que lhe for ofertado ou exigido em qualquer circunstância. Os alunos com dificuldades parecem menos interessados nas aulas de matemática e, acabam por não ter autonomia e autoconfiança nas resoluções de exercícios, dificultando ainda mais nas próximas etapas. Mostrara esse aluno um caminho alternativo, pode ser a chave certa para aproximá-lo da matemática e o que era difícil pode se tornar agradável e até fácil aos olhos deste aluno.

Por exemplo, muitas vezes, quando o professor está apresentando um determinado conteúdo e por alguma razão não compreendemos, recorremos a um colega de classe, que compreendeu o conteúdo e entendeu como resolver certa operação de matemática, e quando este nos explica, é como se tirasse o véu da dificuldade que estava nos separando daquele conteúdo. O que mudou foi a essência do conteúdo? Claro que não, o que mudou então? Talvez a maneira explicada pela visão do colega, ou pode ser que este outro aluno tenha aplicado ou usado uma

metodologia diferente daquela do professor, que tornou mais fácil de compreensão para o aluno com dificuldade.

Se fizermos uso de vetores, em determinados problemas ou situações de geometria plana e analítica, estaremos mostrando um outro jeito de resolver alguns problemas matemáticos e, para que isso aconteça, não é necessário descartar os métodos tradicionais ou substituí-los, bastaria acrescentar como uma ferramenta a mais para ensinar o mesmo conteúdo para os mesmos alunos só que sob outra perspectiva, e com isso os alunos têm a oportunidade de compreender e resolver as mesmas operações por uma metodologia diferente e sob outro olhar matemático. Quem sabe com isso podemos despertar nos alunos o interesse de procurar ou até de desenvolver outras e novas formas de resolver exercícios matemáticos, que muitas das vezes lhes aparece tão sem graça pelo método que sempre lhe é oferecido.

Chalenga (2018) apresentou uma proposta de introdução do estudo de vetores no ensino médio. O autor relata que o tempo gasto com a apresentação de vetores para este nível é recompensado com maior facilidade na abordagem de alguns tópicos, na resolução de problemas e generalização dessas soluções. Ele destaca que o conceito de vetor deve ser apresentado tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos equipolentes) quanto do ponto de vista algébrico (caracterizado por coordenadas) com abordagens condizentes com este nível de ensino. Em seu trabalho são apresentados alguns exercícios para comparação da resolução de problemas sem uso e com o uso de vetores, reafirmando o uso de vetores como instrumento complementar tanto para os alunos como para os professores. Ele traz ainda algumas demonstrações simples de segmentos orientados e segmentos equipolentes com módulo, direção e sentido e ressalta a importância da introdução e ensino de vetores ocorrer desde o primeiro ano do ensino médio.

O autor destaca que, o uso de vetores no ensino médio já ocorre em alguns tópicos da física, entretanto este assunto não é abordado nas aulas de matemática. Assim, na opinião do autor, este conteúdo fica sem uma apresentação mais didática e formal provinda da Geometria Analítica. O autor ressalta que o estudo de vetores tem papel fundamental em diversas áreas das ciências, como física, astronomia, entre outras, e seu aprendizado no ensino médio, em matemática, prepararia melhor

os alunos para a continuação de seus estudos acadêmicos e facilitaria a absorção do conteúdo de Geometria Analítica.

Outro trabalho que também defende o ensino de vetores no ensino médio é o de Rigonatto (2018). Nele é apresentada uma proposta de introdução ao estudo dos vetores no nível médio, com o intuito de oferecer uma possibilidade mais ampla e clara para algumas demonstrações matemáticas, aplicações e seu uso em outros campos, como na física, por exemplo. Além disso, o autor destaca que essa abordagem pode tornar algumas demonstrações da trigonometria, das geometrias analítica e plana

mais lúdicas e compreensíveis. Além disso, o ensino de vetores nesse nível pode proporcionar pré-requisitos para futuros estudos nas áreas das “Ciências Exatas”, e esses conceitos podem ser utilizados como ferramenta para resolver questões matemática e para os estudantes terem autonomia e confiança para aplicarem onde achar confortável.

Outro autor que traz em seu trabalho essa importância é Salvatore (2019). Ele, em seu trabalho de conclusão de curso, ressalta dois pontos importantes do uso de vetores na resolução de problemas:

- Facilita o entendimento dos conceitos e demonstrações.
- Agiliza a resolução de problemas, o que otimiza o tempo.

Segundo Salvatore, a grande maioria dos livros didáticos de matemática disponíveis no ensino médio não trata desse assunto. Ele destaca que o trabalho com vetores deve proporcionar aos estudantes, inicialmente, compreensão do conceito, tanto do ponto de vista geométrico, como do ponto de vista algébrico, para que os alunos sejam capazes de interpretar a representação geométrica da soma de vetores, da multiplicação de vetor por um escalar e de compreender a relação entre vetores e as transformações isométricas (reflexão, rotação e translação)” (SALVATORE, 2019).

De forma geral, os trabalhos citados ressaltam não a importância de introduzir o estudo sobre vetores, de forma que os alunos obtenham uma base sólida desse conteúdo. Base essa que servirá de suporte não só para a resolução de problemas, como também para o estudo de outros conteúdos como, exemplo: campo elétrico, eletricidade, aceleração e outros mais. Todos os autores citados destacam que esse estudo deve ocorrer desde o primeiro ano do ensino médio.

Então pergunto: por que não usarmos vetores para explicar e resolver certos conteúdos matemáticos já no ensino médio? O objetivo desse trabalho é mostrar umamaneira que isso pode ocorrer. Para isso, serão apresentadas as definições, propriedades e teoremas importantes envolvendo o tema e, na sequência, atividadesque poderiam ser aplicadas no ensino médio.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, serão apresentadas as principais definições e conceitos envolvendo vetores, de acordo com Steinbruch e Winterle (2003).

### 2.1. DEFINIÇÕES

#### 2.1.1. RETA ORIENTADA

#### 2.1.2. SEGMENTO ORIENTADO

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado origem do segmento, o segundo chamado extremidade. O segmento orientado de origem  $A$  e extremidade  $B$  será representado por  $AB$  e, geometricamente, indicado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento.



Figura 2 – Segmento Orientado. Fonte: elaborada pela autora.

#### 2.1.3. SEGMENTO NULO

É aquele cuja extremidade coincide com a origem.

$$A = B$$

Figura 3 – Segmento Nulo. Fonte: elaborada pela autora.

#### 2.1.4. SEGMENTO OPOSTO

Se  $AB$  é um segmento orientado, o segmento orientado  $BA$  é oposto a  $AB$ . Neste caso, a extremidade de um é a origem do outro e a origem de um é a extremidade do outro.

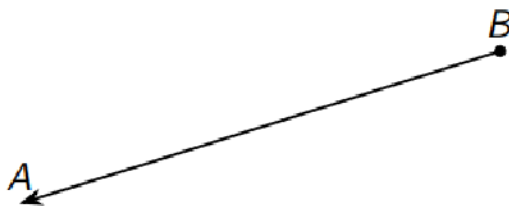


Figura 4 - Segmento Oposto. Fonte: elaborada pela autora.

### 2.1.5. MEDIDA DE UM SEGMENTO

Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado pode-se associar um número real, não negativo, que é a medida do segmento em relação àquela unidade. A medida do segmento orientado é denominada **comprimento, módulo ou norma**. O comprimento do segmento  $AB$  é indicado por  $\overline{AB}$ . Por exemplo, na Figura 5,  $\overline{AB} = 5u$ .

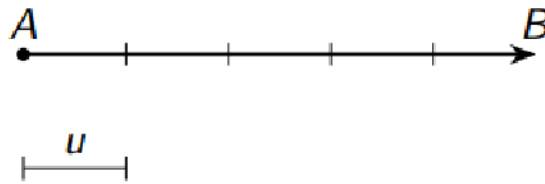


Figura 5 - Medida de um segmento. Fonte: elaborada pela autora.

É importante observar que os segmentos nulos têm comprimento zero e que segmentos opostos possuem a mesma medida.

### 2.1.6. DIREÇÃO E SENTIDO

Dois segmentos orientados não nulos  $AB$  e  $CD$  têm a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas ou coincidentes e possuem o mesmo sentido se a orientação for a mesma. Na Figura 6, por exemplo,  $AB$  e  $CD$  possuem mesma direção, mas sentidos opostos.

Só se pode comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles tiverem a mesma direção. Dois segmentos opostos possuem mesma direção, mas sentidos opostos.

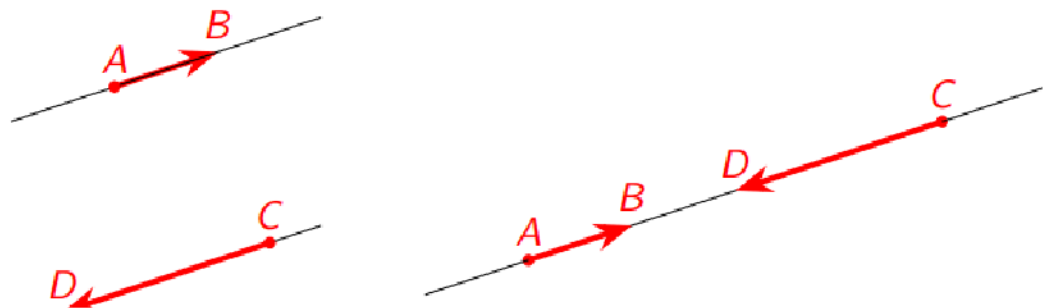
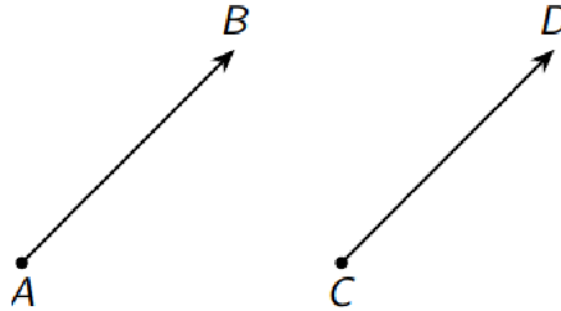


Figura 6 - Direção e Sentido - Fonte: elaborada pela autora.

### 2.1.7. SEGMENTOS EQUIPOLENTES

Dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  são equipolentes quando possuem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento, como os da Figura 7. A equipolência entre os segmentos  $AB$  e  $CD$  é representada por  $AB \sim CD$ .



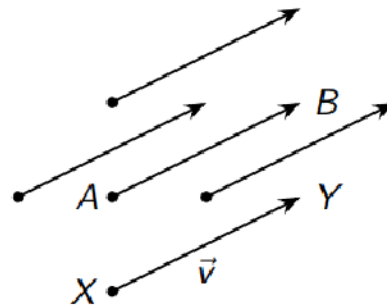
**Figura 7** - Segmentos Equipolentes. Fonte: elaborada pela autora.

Dois segmentos nulos são sempre equipolentes.

### 2.1.8. VETOR

Vetor determinado por um segmento orientado  $AB$  é o conjunto de todos os segmentos equipolentes a  $AB$ . Se indicarmos por  $\vec{v}$  este conjunto, e seja  $XY$  um segmento qualquer do conjunto, simbolicamente podemos escrever:

$$\vec{v} = \{XY \mid XY \sim AB\}.$$



**Figura 8** - Vetor. Fonte: elaborada pela autora.

Seguem algumas observações importantes sobre essa definição:

- O vetor determinado pelo segmento  $AB$  é indicado por  $\overrightarrow{AB}$ .
- Um mesmo vetor  $\overrightarrow{AB}$  é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, chamados representantes deste vetor, todos equipolentes entre si. Assim, qualquer um destes representantes determinam o mesmo vetor.

- As características de um vetor são as mesmas de qualquer um de seus representantes, isto é: a norma (ou módulo ou comprimento), a direção e o sentido do vetor são a norma, a direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.
- Vamos denotar a norma de  $\vec{v}$  por  $\|\vec{v}\|$ .
- Dois vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  são iguais se, e somente se,  $AB \sim CD$ .
- Os segmentos nulos, por serem equipolentes entre si, determinam um único vetor, chamado de vetor nulo e denotado por  $\vec{0}$ .
- Dado um vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , o vetor  $\overrightarrow{BA}$  é o oposto de  $\overrightarrow{AB}$  e é denotado por  $-\overrightarrow{AB}$  ou  $-\vec{v}$ .
- Se  $\|\vec{v}\| = 1$ , dizemos que  $\vec{v}$  é um vetor unitário.

### 2.1.9. VERSOR

O versor de um vetor não nulo  $\vec{v}$  é o vetor unitário de mesma direção e sentido de  $\vec{v}$ . Na Figura 9,  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são unitários, pois ambos possuem norma 1, e possuem a mesma direção de  $\vec{v}$ . No entanto, apenas  $\vec{u}_1$  tem o mesmo sentido de  $\vec{v}$ . Portanto apenas  $\vec{u}_1$  é um versor de  $\vec{v}$ .

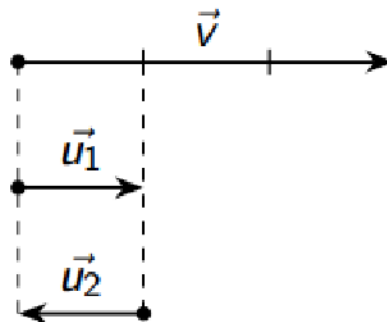
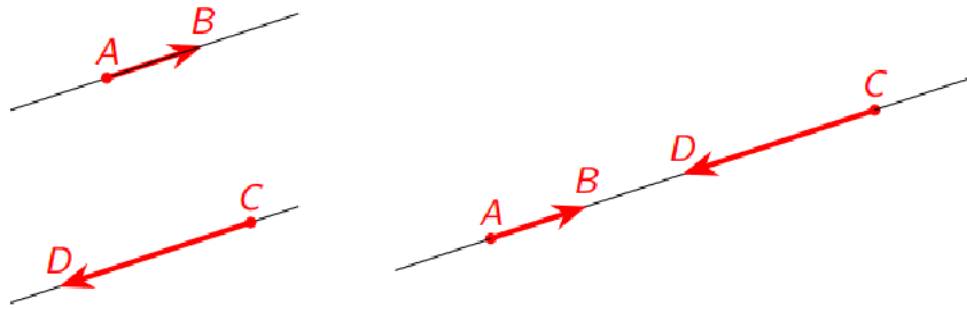


Figura 9 - Versor de um vetor. Fonte: elaborada pela autora.

### 2.1.10. VETORES COLINEARES

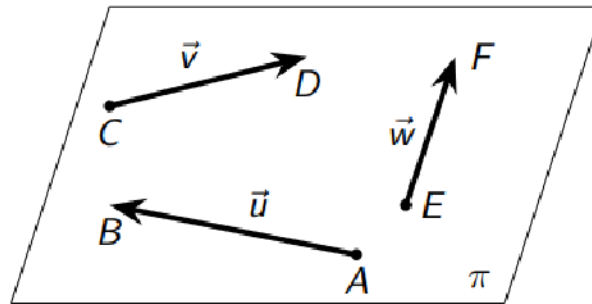
Dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares, ou paralelos, se tiverem a mesma direção. Ou seja, se tiverem representantes  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas, como ocorre na Figura 10.



**Figura 10** - Vetores colineares. Fonte: elaborada pela autora.

### 2.1.11. VETORES COPLANARES

Se os vetores não nulos  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  possuem representantes  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  e  $\overrightarrow{EF}$  pertencentes a um mesmo plano  $\pi$ , dizemos que eles são coplanares.



**Figura 11**- Vetores coplanares. Fonte: elaborada pela autora.

É importante ressaltar que dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  quaisquer, eles são sempre coplanares, pois sempre podemos tomar um ponto no espaço e, com origem nele, determinar representantes de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  pertencentes a um plano  $\pi$  que passa por este ponto.

## 2.2. OPERAÇÕES COM VETORES

### 2.2.1. ADIÇÃO DE VETORES

Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores quaisquer e  $\vec{s}$  o vetor que representa a soma entre eles,  $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ , podemos determinar  $\vec{s}$  das seguintes maneiras:

#### 2.2.1.1. REGRA DO POLÍGONO

Utilizando representantes de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  tais que a extremidade de um se encontre com a origem do outro, para determinar  $\vec{s}$  basta fechar o polígono, traçando um segmento que una a origem do primeiro com a extremidade do segundo. O sentido de  $\vec{s}$  será do início do primeiro vetor ao final do segundo, como na Figura 12.



Figura 12 – Regra do Polígono. Fonte: Elaborada pela autora.

### 2.2.1.2. REGRA DO PARALELOGRAMO

Utilizando representantes de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  tais que as origens de ambos sejam coincidentes, pela extremidade de cada um deles, devemos traçar um segmento paralelo ao outro, formando um paralelogramo. O vetor  $\vec{s}$  é a diagonal do paralelogramo, de forma que te, a mesma origem de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , como na Figura 13.



Figura 13 - Regra do Paralelogramo. Fonte: elaborada pela autora.

Note pelas Figuras 12 e 13 que o vetor soma é o mesmo, independente da regra utilizada para determiná-lo.

### 2.2.1.3. PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE VETORES

A adição de vetores possui as seguintes propriedades:

- Comutativa:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .
- Associativa:  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .
- Existência do elemento neutro:  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ .
- Vetor oposto: Qualquer que seja  $\vec{v}$ , existe um único vetor  $-\vec{v}$ , tal que  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ .

### 2.2.2. SUBTRAÇÃO DE VETORES

O vetor  $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$  é denominado de diferença entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Para determiná-lo, basta somarmos  $\vec{u}$  com o oposto de  $\vec{v}$ ,  $-\vec{v}$ . Ou seja,  $\vec{d} = \vec{u} + (-\vec{v})$ .

### 2.2.3. PRODUTO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL

Dado um vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  e um número real (ou escalar)  $k \neq 0$ , denomina-se de produto de  $k$  por  $\vec{v}$ , o vetor  $\vec{p} = k\vec{v}$  tal que:

- $\|\vec{p}\| = |k| * \|\vec{v}\|$
- $\vec{p}$  tem a mesma direção de  $\vec{v}$ .
- $\vec{p}$  tem o mesmo sentido de  $\vec{v}$ , se  $k > 0$  e sentido oposto se  $k < 0$ .

Na Figura 14 são apresentados dois exemplos  $\vec{p}_1 = 2\vec{u}$  e  $\vec{p}_2 = -\frac{1}{2}\vec{v}$ .

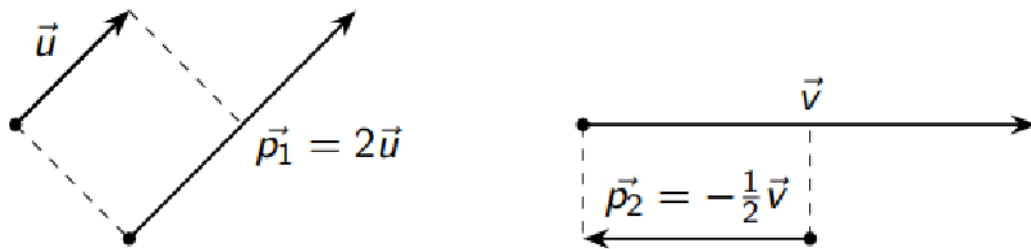


Figura 14 - Produto de um vetor por um número real. Fonte: elaborada pela autora.

Seguem algumas observações importantes sobre essa operação:

- Se  $k=0$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , o produto  $k\vec{v}$  é o vetor  $\vec{0}$ .
- Seja um vetor  $k\vec{v}$ , com  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Se fizermos com que o número  $k$  percorra todo o conjunto dos números reais, obteremos todos os infinitos vetores colineares, ou paralelos, a  $\vec{v}$ .
- O versor de um vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  é o vetor unitário  $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} * \vec{v}$ .

#### 2.2.3.1. PROPRIEDADES DO PRODUTO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL

Essa operação possui as seguintes propriedades:

- Associativa:  $a * (b\vec{v}) = (a * b)\vec{v}$ .
- Distributiva em relação à adição de escalares:

$$(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}.$$

- Distributiva em relação à adição de vetores:

$$a * (\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

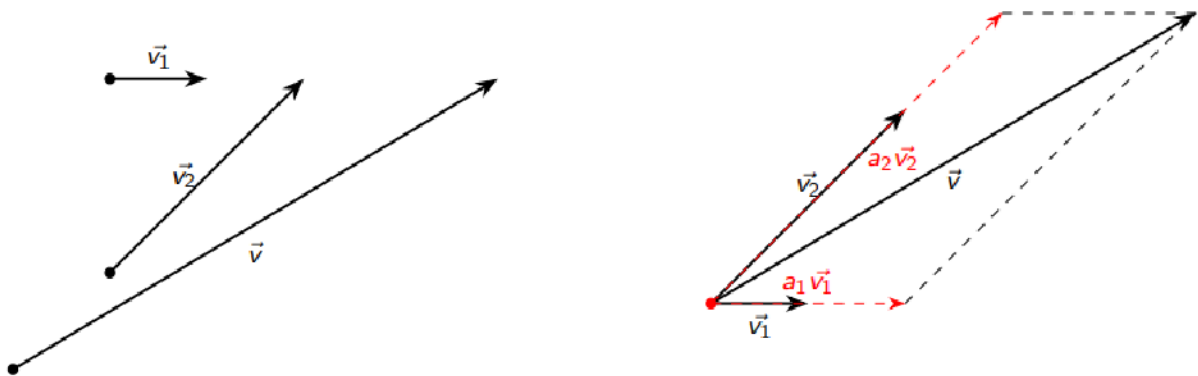
- Identidade:  $1\vec{v} = \vec{v}$ .

### 2.3. VETORES NO PLANO

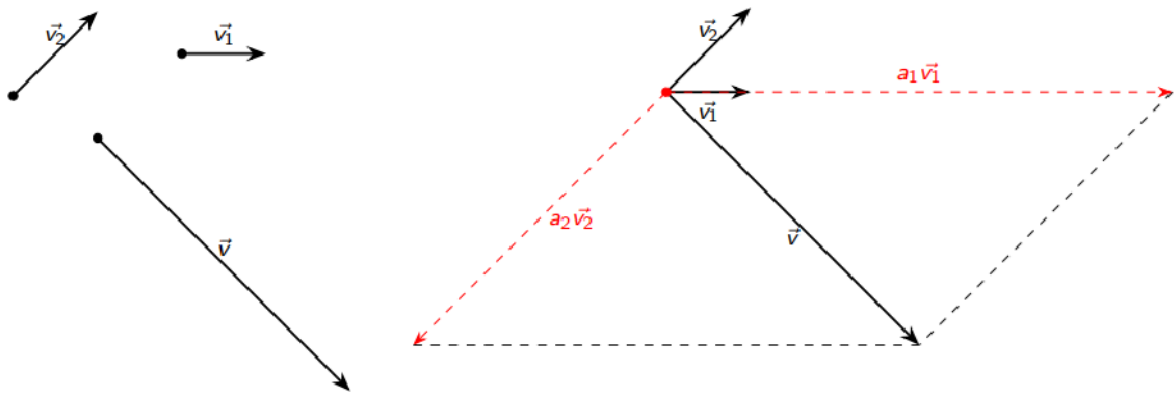
Dados dois vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  não colineares, qualquer que seja  $\vec{v}$  (coplanar a  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ ) pode ser escrito como uma combinação linear de  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ . Dizer que  $\vec{v}$  é uma combinação linear de  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  é o mesmo que dizer que existem dois números reais  $a_1$  e  $a_2$  tais que:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2.$$

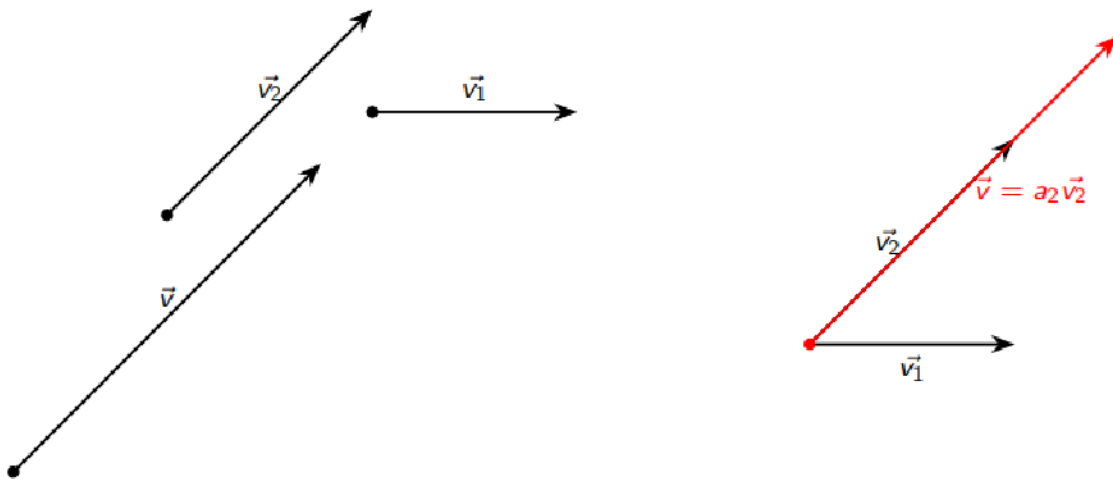
As Figuras 15, 16 e 17 apresentam três exemplos ilustrando situações distintas em que dados vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  não colineares e um vetor arbitrário coplanar  $\vec{v}$ , sempre é possível formar um paralelogramo em que os lados são determinados por  $a_1\vec{v}_1$  e  $a_2\vec{v}_2$ , ou seja, sempre é possível determinar  $a_1$  e  $a_2$  tais que  $\vec{v}$  seja uma combinação linear de  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .



**Figura 15** - Decomposição de um vetor no plano com  $a_1, a_2 > 0$ . Fonte: elaborada pela autora.



**Figura 16** - Decomposição de um vetor no plano com  $a_1 > 0$  e  $a_2 < 0$ . Fonte: elaborada pela autora.



**Figura 17** - Decomposição de um vetor no plano com  $a_1 = 0$  e  $a_2 > 0$ . Fonte: elaborada pela autora.

### 2.3.1. DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Dado um conjunto de vetores, quando um for combinação linear dos outros, dizemos que os vetores desse conjunto são linearmente dependentes (LD), ou que o conjunto é LD. Caso não seja possível escrever nenhum vetor como combinação linear dos demais, os vetores do conjunto são linearmente independentes (LI).

- Dado um conjunto com um único vetor, por definição, esse conjunto é LD se o vetor desse conjunto for o vetor nulo  $\vec{0}$  e é LI, caso contrário.
- Dado um conjunto de dois vetores, ele é LD se ambos forem colineares (ou paralelos), já que nesse caso sempre é possível escrever  $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ , em que  $k$  é um número real. Caso os vetores do conjunto não sejam colineares, o conjunto é LI.

- Dado um conjunto de três vetores, ele é LD se todos forem coplanares, já que neste caso, como dito anteriormente, sempre é possível escrever  $\vec{v}_3 = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ . Caso um dos vetores do conjunto não estiver no mesmo plano que os outros dois, então o conjunto é LI.
- Dado um conjunto de quatro ou mais vetores, esse conjunto é sempre LD.

### 2.3.2. BASES

Um conjunto de vetores LI é chamado de base. No caso do plano ( $\mathbb{R}_2$ ) um conjunto com dois vetores LI é uma base, ou seja, dois vetores não colineares formam uma base do plano.

Uma base  $B$  do plano formada pelos vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  é denotada por

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}.$$

Se  $B$  é uma base do plano, todos os vetores  $\vec{v}$  do plano podem ser escritos como  $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ . Os números reais  $a_1$  e  $a_2$  são chamados de componentes ou coordenadas de  $\vec{v}$  em relação à base  $B$  e podemos escrever  $\vec{v} = (a_1, a_2)_B$ .

Na Figura 18 é apresentado um exemplo no qual seja  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ,  $\vec{v} = (2, 3)_B$ .

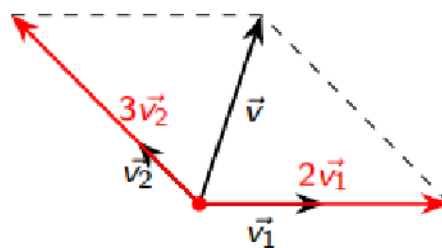


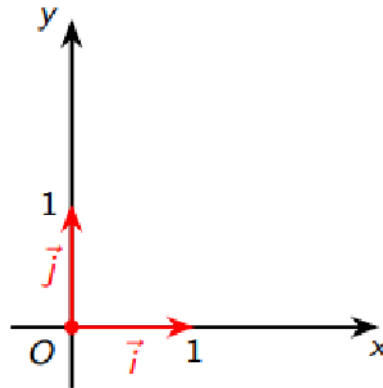
Figura 18 - Base no plano. Fonte: elaborada pela autora.

Quando os vetores de uma base forem unitários (norma igual a 1) e perpendiculares entre si, dizemos que essa base é uma base ortonormal.

### 2.3.3. A BASE CANÔNICA

Existem infinitas bases ortonormais do plano, porém uma delas é particularmente importante. Trata-se da base formada pelos vetores com origem

coincidente com a origem do plano cartesiano e com extremidades nos pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ . Esses vetores são unitários e perpendiculares entre si, e são, respectivamente, os versores do eixo  $x$  e do eixo  $y$  do plano cartesiano. Esses versores são simbolizados, respectivamente, por  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  e a base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  é chamada de base canônica do plano. Nesse trabalho, a menos que haja referência contrária, a base utilizada sempre será essa.

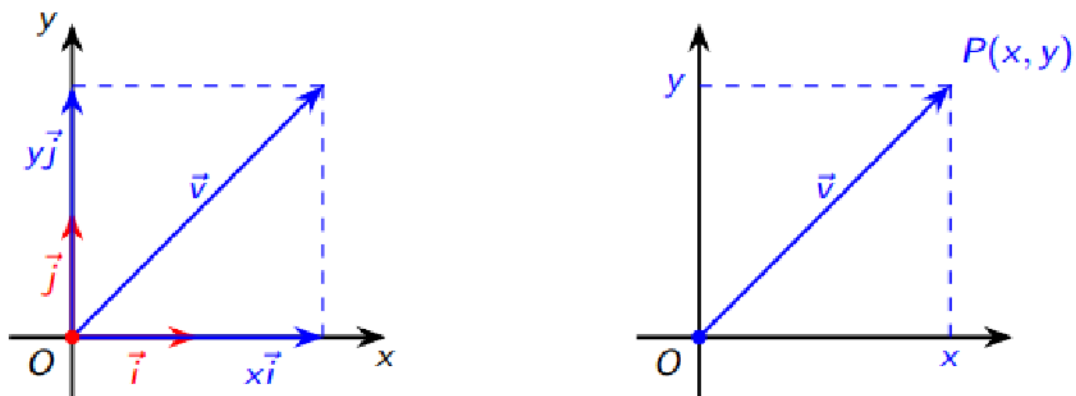


**Figura 19** - Base canônica do plano. Fonte: elaborada pela autora.

#### 2.3.4. EXPRESSÃO ANALÍTICA DE UM VETOR

Fixada a base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  fica estabelecida uma relação biunívoca entre os vetores do plano e os pares ordenados  $(x, y)$  de números reais (os pontos do plano). Nestas condições, cada vetor  $\vec{v}$  do plano pode ser associado com um par de números reais  $(x, y)$  que são as coordenadas de  $\vec{v}$  na base canônica.

Assim, o vetor  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$  pode ser representado por  $\vec{v} = (x, y)$ , denominada expressão analítica de  $\vec{v}$ . Se formos representar geometricamente esse vetor no plano cartesiano, ele tem origem em  $O(0,0)$  e extremidade em  $P(x, y)$ .



**Figura 20** - Expressão Analítica de um vetor no plano. Fonte: elaborada pela autora.

Por exemplo, os vetores  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{w} = 4\vec{j}$  e  $\vec{z} = -7\vec{i}$  podem ser representados analiticamente por  $\vec{v} = (2,3)$ ,  $\vec{u} = (1,-1)$ ,  $\vec{w} = (0,4)$  e  $\vec{z} = (-7,0)$  e geometricamente pela Figura 21.

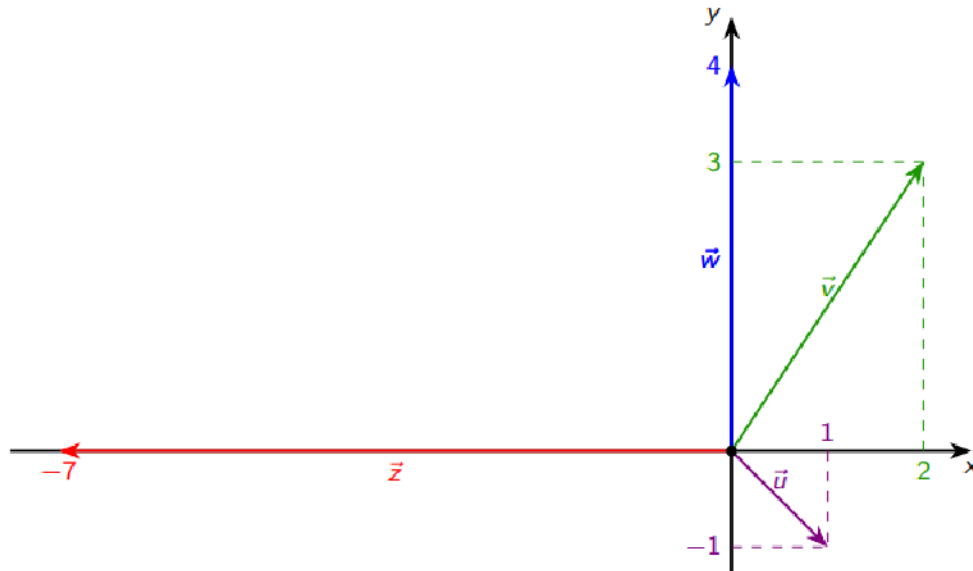


Figura 21 - Expressão Analítica de um vetor no plano - Exemplo. Fonte: elaborada pela autora.

## 2.3.5. IGUALDADES E OPERAÇÕES

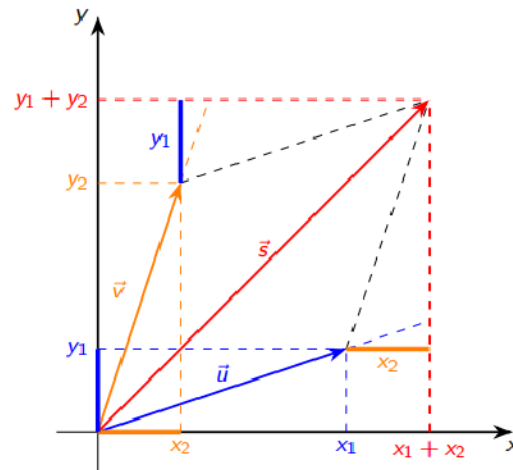
### 2.3.5.1. IGUALDADE DE VETORES NO PLANO

Dois vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  são iguais, escreve-se  $\vec{u} = \vec{v}$  se, e somente se, suas coordenadas correspondentes forem iguais, ou seja  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ .

### 2.3.5.2. OPERAÇÕES COM VETORES NO PLANO

Dados dois vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  e um número real  $k$ , com a expressão analítica de um vetor no plano, define-se:

- Soma:  $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .



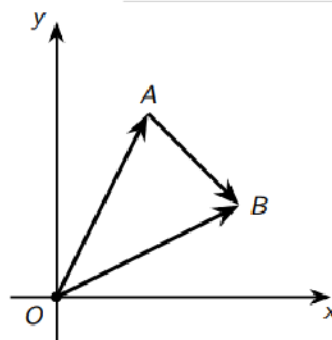
**Figura 22** - Ilustração da expressão analítica da soma de dois vetores no plano. Fonte: elaborada pela autora.

- $k\vec{u} = (k * x_1, k * y_1)$ .

### 2.3.6. VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

Muitas vezes, um vetor é representado por um segmento orientado que não parte da origem do sistema cartesiano. Neste caso, podemos encontrar um representante deste vetor que parte da origem do sistema, assim encontramos suas coordenadas na base canônica e podemos fazer as operações, como definidas anteriormente.

Consideremos o vetor  $\overrightarrow{AB}$ , de origem no ponto  $A(x_A, y_A)$  e extremidade em  $B(x_B, y_B)$ , e os vetores  $\overrightarrow{OA}$ , e  $\overrightarrow{OB}$ , com origem em  $O(0,0)$  e extremidade em  $A$  e  $B$ , respectivamente. Sabemos que  $\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A)$  e  $\overrightarrow{OB} = (x_B, y_B)$ . Utilizando a regra do polígono, podemos observar pela Figura 23 que  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ , o que implica que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A)$ . Logo,  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ .



**Figura 23** - Vetor definido por dois pontos. Fonte: elaborada pela autora.

## 2.4. VETORES NO ESPAÇO

Todo o estudo de vetores no plano pode ser realizado no espaço ( $\mathbb{R}_3$ ) de forma análoga, considerando as adequações necessárias. No espaço, qualquer conjunto  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  de três vetores não coplanares é uma base e, de forma análoga ao plano, todo vetor  $\vec{v}$  do espaço é combinação linear dos vetores da base, isto é, sempre existem escalares  $a_1, a_2$  e  $a_3$  tais que

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 .$$

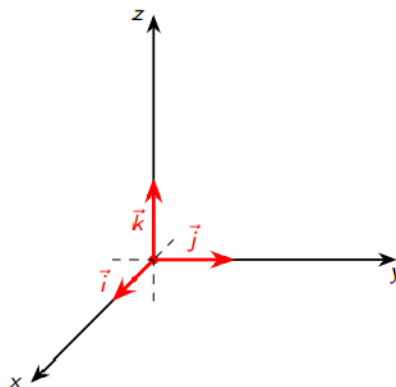
Os números  $a_1, a_2$  são as coordenadas, ou componentes, de  $\vec{v}$  em relação à base considerada.



**Figura 24** - Decomposição de um vetor no espaço com  $a_1, a_2$  e  $a_3 > 0$ . Fonte: elaborada pela autora.

### 2.4.1. A BASE CANÔNICA DO ESPAÇO

A base canônica do espaço é o conjunto  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , sendo  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$ , respectivamente, os versores dos eixos  $x, y$  e  $z$ , os vetores com origem em  $(0,0,0)$  e extremidade nos pontos  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  e  $(0,0,1)$  do espaço, respectivamente. Esses três vetores são unitários e, ao compararmos dois a dois, sempre possuem  $90^\circ$  entre si, ou seja, trata-se de uma base ortonormal.



**Figura 25** - Base Canônica do espaço. Fonte: elaborada pela autora.

### 2.4.2. REPRESENTANDO VETORES NO ESPAÇO

Cada ponto  $P$  do espaço vai corresponder a uma terna  $(a,b,c)$  de números reais, chamadas de coordenadas de  $P$  e denominadas abscissa, ordenada e cota, respectivamente. Para representarmos  $P$  no espaço, devemos encontrar inicialmente um ponto  $P'$  em um dos planos. Por exemplo, podemos desenhar o ponto  $P' = (a,b,0)$  no plano  $xy$ . Na sequência temos que transladar com  $P'$  na direção do outro eixo, no caso  $z$ . Assim  $P'$  irá transladar  $|c|$  unidades para cima ou para baixo (dependendo do sinal de  $c$ ), determinando assim o ponto  $P$ . Repare que  $P$  é o vértice oposto à origem  $O(0,0,0)$  do espaço de um paralelepípedo de arestas medindo  $|a|$ ,  $|b|$  e  $|c|$ .

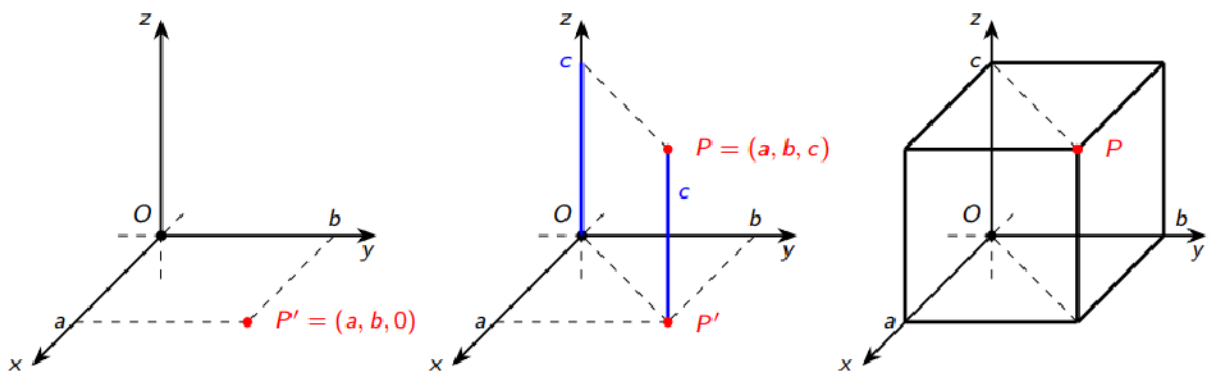


Figura 26 - Representando um ponto no espaço. Fonte: elaborada pela autora.

Utilizando esse procedimento e sabendo que um vetor  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  geometricamente pode ser representado como um vetor com origem em  $O(0,0,0)$  e extremidade em  $P=(x,y,z)$ , ou seja,  $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ , o vetor  $\vec{v}$  pode ser representado no espaço como apresentado na Figura 27. Para simplificar, assim como no plano, escreveremos  $\vec{v} = (x, y, z)$ .

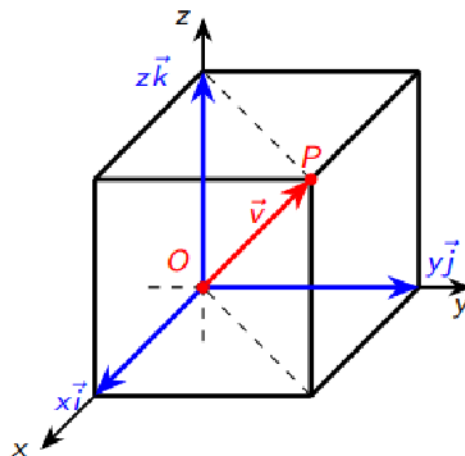


Figura 27 - Representando vetores no espaço. Fonte: elaborada pela autora.

### 2.4.3. IGUALDADE E OPERAÇÕES

Da mesma forma que ocorre no plano, dados dois vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , e um número real  $k$ , teremos no espaço:

- Igualdade:  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são iguais se, e somente se,  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$  e  $z_1 = z_2$ .
- Soma: seja  $\vec{s}$  o vetor soma. Então  

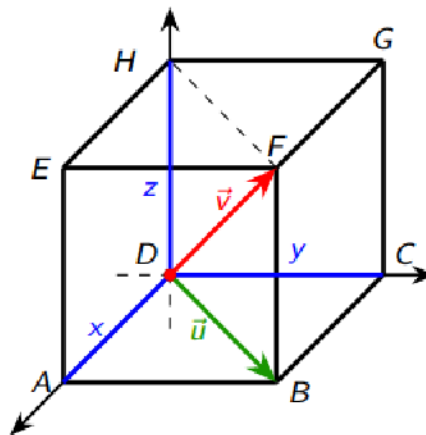
$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
- Produto de um número real por um vetor:  

$$k\vec{u} = (k * x_1, k * y_1, k * z_1)$$
- Vetor definido por dois pontos: sejam os pontos  $A(x_A, y_A, z_A)$  e  $B(x_B, y_B, z_B)$  do espaço. Então:  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ .

### 2.5. CÁLCULO DA NORMA DE UM VETOR

Dado um vetor  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  do espaço, sua norma, denotada por  $\|\vec{v}\|$  pode ser calculada pela expressão:  $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

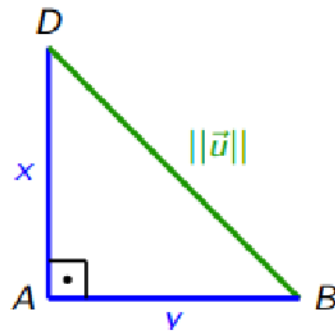
**Demonstração:** para demonstrar essa fórmula, utilizaremos inicialmente um vetor  $\vec{u} = (x, y, 0)$  no plano  $xy$ , como ilustrado na Figura 28.



**Figura 28** - Norma de um vetor parte 1. Fonte: elaborada pela autora.

Observando o triângulo ABD, como ilustrado na Figura 29, temos pelo Teorema de Pitágoras que

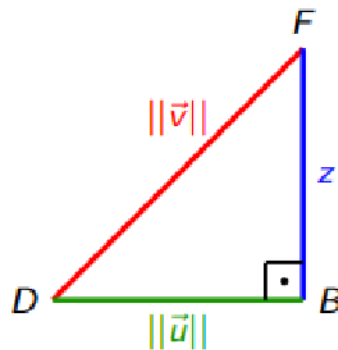
$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



**Figura 29** - Norma de um vetor parte 2. Fonte: elaborada pela autora.

Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, agora no triângulo BDF, como ilustrado na Figura 30, segue que

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + z^2 \Rightarrow \|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



**Figura 30** - Norma de um vetor parte 3. Fonte: elaborada pela autora.

## 2.6. CÁLCULO DO VERSOR DE UM VETOR

Seja  $\vec{u}$  o versor de um vetor  $\vec{v}$ , então:

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} * \vec{v}$$

**Demonstração:** como  $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$  é um número real positivo, temos que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  possuem a mesma direção e o mesmo sentido. Faltava então mostrar que o vetor  $\vec{u}$  é unitário. Seja  $\vec{v} = (x, y, z)$ , temos que

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} * (x, y, z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \Rightarrow$$

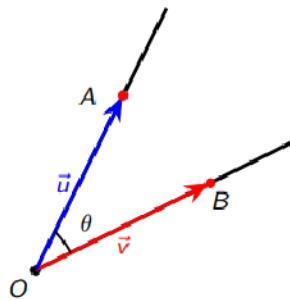
$$\Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}} = 1$$

Logo, o vetor  $\vec{u}$  é unitário e possui a mesma direção e sentido de  $\vec{v}$ , ou seja,  $\vec{u}$  é um versor de  $\vec{v}$ .

## 2.7. CÁLCULO DO ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

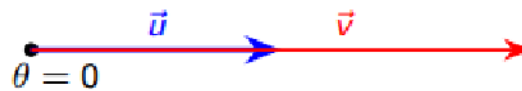
Sejam três pontos do espaço  $O$ ,  $A$  e  $B$  tais que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ , o ângulo  $\theta$  entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é definido como o menor ângulo formado pelas semirretas  $OA$  e  $OB$ .



**Figura 31** - Ângulo entre dois vetores. Fonte: elaborado pela autora.

Da forma como é definido, temos que:

- $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ .
- Se  $\theta = 0$ , então  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  possuem a mesma direção e sentido.



**Figura 32** - Ângulo entre vetores ( $\theta=0$ ). Fonte: elaborada pela autora.

- Se  $\theta = 180^\circ$ , então  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  possuem a mesma direção e sentidos opostos.

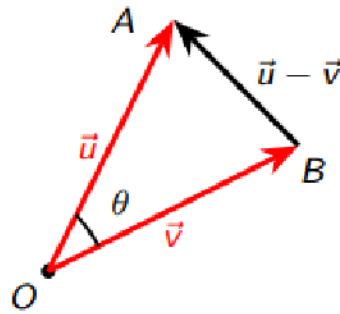


**Figura 33** - Ângulo entre vetores ( $\theta=180^\circ$ ). Fonte: elaborada pela autora.

O cálculo do ângulo entre dois vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , é dado pela fórmula

$$\cos \theta = \frac{x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2}{\|\vec{u}\| * \|\vec{v}\|}$$

**Demonstração:** vamos utilizar a Lei dos Cossenos no triângulo ABO da Figura 34.



**Figura 34** - Demonstração da fórmula do ângulo entre dois vetores. Fonte: elaborada pela autora.

Temos então que

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 * \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \cos \theta \quad (1)$$

Como  $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ , então:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2 * (x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2) = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 * (x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2) \end{aligned}$$

Igualando essa última expressão a equação (1), temos que

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 * \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \cos \theta &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 * (x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow -2 * \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \cos \theta &= -2 * (x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \cos \theta &= x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2}{\|\vec{u}\| * \|\vec{v}\|} \end{aligned}$$

## 2.8. PRODUTO ESCALAR

Chama-se produto escalar, ou produto interno, vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  e ângulo  $\theta$  entre eles, o número  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  dado por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \cos \theta, & \text{se } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases} \quad (2)$$

Da fórmula do ângulo entre dois vetores temos que

$$\cos \theta = \frac{x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2}{\|\vec{u}\| * \|\vec{v}\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \cos \theta = x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2 \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), podemos reescrever a definição como

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2, & \text{se } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Da mesma forma, a fórmula do ângulo entre dois vetores pode ser reescrita como

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| * \|\vec{v}\|}$$

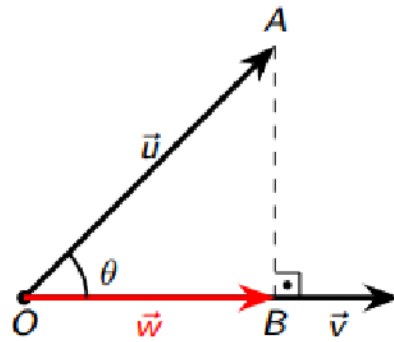
### 2.8.1. PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR

O produto escalar entre dois vetores possui as seguintes propriedades:

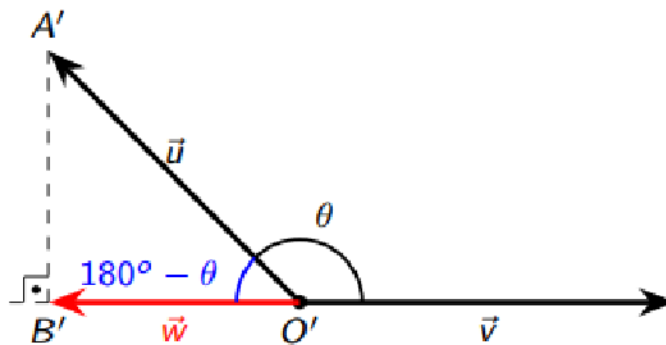
- Comutativa:  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
- Distributiva:  $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
- Seja  $k$  um número real:  $\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle = k * \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, k\vec{v} \rangle$
- Se  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , então  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais ( $\theta = 90^\circ$ ).

## 2.9. PROJEÇÃO DE UM VETOR

Sejam os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , não nulos, e  $\theta$  o ângulo entre eles. A projeção de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$  é o vetor  $\vec{w}$ , da Figura 35 quando  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  e o  $\vec{w}$  da Figura 36, quando  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ .



**Figura 35** - Projeção no caso em que  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ . Fonte: elaborada pela autora.



**Figura 36** - Projeção no caso em que  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ . Fonte: elaborada pela autora.

Para determinarmos uma expressão para  $\vec{w}$  vamos, inicialmente utilizado o triângulo ABO da Figura 35. Temos que

$$\cos \theta = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|} \quad (4)$$

Por outro lado, do triângulo A'B'O' da Figura 36, temos que

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|} \quad (5)$$

Como  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ , temos da expressão (5) que

$$\cos \theta = -\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|} \quad (6)$$

Como  $\|\vec{w}\| > 0$  e  $\|\vec{u}\| > 0$ , então podemos resumir as expressões (4) e (6)

a:

$$|\cos \theta| = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|} \quad (7)$$

Substituindo a fórmula de  $\cos \theta$  em (7), temos

$$\left| \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right| = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow \|\vec{w}\| = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{v}\|} \quad (8)$$

Como  $\vec{w}$  e  $\vec{v}$  são colineares, temos que

$$\vec{w} = k * \vec{v} \Rightarrow \|\vec{w}\| = |k| * \|\vec{v}\| \quad (9)$$

Substituindo (8) em (9), temos

$$\frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{v}\|} = |k| * \|\vec{v}\| \Rightarrow k = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$$

Assim, temos a expressão para determinar a projeção de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ :

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{w} = \left( \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \right) * \vec{v}$$

Quando  $\vec{v}$  é unitário, temos que

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle * \vec{v} \Rightarrow \|proj_{\vec{v}}\vec{u}\| = |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$$

Isso significa que o módulo do produto escalar entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , quando  $\vec{v}$  é unitário, pode ser interpretado geometricamente como sendo a norma da projeção de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ .

## 2.10. PRODUTO VETORIAL

Dados os vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , tomados nessa ordem, chama-se produto vetorial dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e denota-se por  $\vec{u} \times \vec{v}$  o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 * z_2 - z_1 * y_2)\vec{i} + (x_1 * z_2 - z_1 * x_2)\vec{j} + (x_1 * y_2 - y_1 * x_2)\vec{k}$$

O que é equivalente a:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Para essa operação, não é válida a propriedade comutativa. Na verdade,  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ . Porém são válidas as propriedades apresentadas a seguir.

### 2.10.1. PROPRIEDADES DO PRODUTO VETORIAL

- Distributiva:  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ .
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ .
- Seja  $k$  um número real,  $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$  se, e somente se,  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares.

## 2.10.2. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO VETORIAL

O produto vetorial entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  tem como resultado um vetor simultaneamente ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

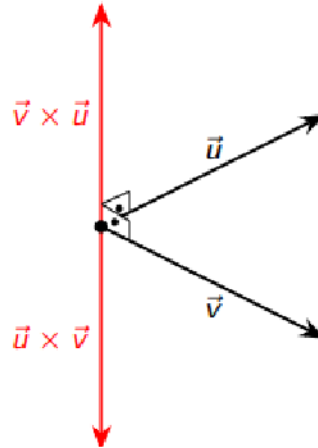


Figura 37 - Produto vetorial. Fonte: elaborada pela autora.

## 2.10.3. NORMA DO PRODUTO VETORIAL

A norma do produto vetorial dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é igual a área do paralelogramo determinado por esses vetores.

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{v} \times \vec{u}\| = \text{ÁREA}_{ABCD}$$

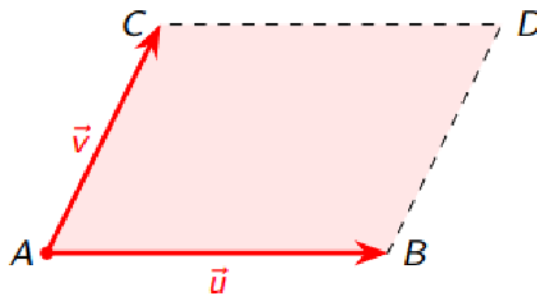


Figura 38 - Norma do produto vetorial. Fonte: elaborada pela autora.

## 2.11. PRODUTO MISTO

Dados os vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ , tomados nessa ordem, chama-se produto misto dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e denota-se por  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , o número real

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$$

O que é equivalente a:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

### 2.11.1. PROPRIEDADE DO PRODUTO MISTO

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$  se um dos vetores é nulo, se dois deles são colineares ou se os três são coplanares.
- O produto misto independe da ordem circular dos vetores

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$

- Decorre da propriedade anterior que as operações de produto vetorial e escalar, em um produto misto, podem permutar:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

### 2.11.2. MÓDULO DO PRODUTO MISTO

O módulo do produto misto  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é igual ao volume do paralelepípedo cujas arestas são determinadas pelos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

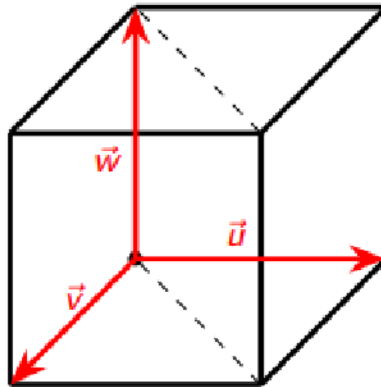


Figura 39 - Módulo do produto misto. Fonte: elaborada pela autora.

### 3. PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Neste capítulo serão apresentados alguns exercícios do ensino médio que podem ser resolvidos alternativamente utilizando os conceitos de vetores, apresentados no capítulo anterior. Em cada um deles, será exibida uma resolução tradicional, sem utilizar vetores e na sequência a resolução alternativa. As resoluções alternativas não necessariamente são mais simples que as tradicionais. A ideia é mostrar que o ensino de vetores pode ocorrer no ensino médio, acrescentando mais uma ferramenta matemática ao conhecimento dos alunos, como discutido na introdução.

**Exercício 1:** Determine o ponto médio do segmento  $AB$ , em que  $A(3,7)$  e  $B(5,-1)$  são pontos do plano cartesiano.

#### Resolução tradicional:

Vamos considerar que  $M$  é um ponto da reta que passa por  $A$  e  $B$ . Essa reta terá equação geral

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x + 2y - 38 = 0$$

Isolando  $y$ , temos que  $y = -4x + 19$ . Então podemos escrever  $M$  como:  $M(x, -4x+19)$ . Como  $M$  é o ponto médio entre  $A$  e  $B$ , então a distância entre  $A$  e  $M$  é igual a distância entre  $B$  e  $M$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)^2 + (-4x+19-7)^2} &= \sqrt{(x-5)^2 + (-4x+19+1)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 16x^2 - 96x + 144} &= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 16x^2 - 160x + 400} \Rightarrow \\ \Rightarrow 17x^2 - 102x + 153 &= 17x^2 - 170x + 425 \Rightarrow \\ \Rightarrow 68x &= 272 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Logo,  $M$  tem coordenadas 4 e  $-4 * 4 + 19 = 3$ . Portanto,  $M(4,3)$ .

#### Resolução usando vetores:

Seja  $M(x,y)$ , então os vetores  $\overrightarrow{AM} = (x-3, y-7)$  e  $\overrightarrow{BM} = (5-x, -1-y)$  são iguais. Logo

$$x - 3 = 5 - x \Rightarrow x = 4 \text{ e}$$

$$y - 7 = -1 - y \Rightarrow y = 3$$

Portanto,  $M(4,3)$ .

**Exercício 2:** Duas fazendas F e G estão localizadas próximas a duas rodovias que se cortam perpendicularmente. Um engenheiro querendo construir uma nova estrada ligando as duas fazendas, usou o plano cartesiano para representar o problema, considerando as estradas como os eixos  $x$  e  $y$  e as fazendas como os pontos  $F(3,1)$  e  $G(6,4)$ . Qual é a menor distância entre essas duas fazendas?

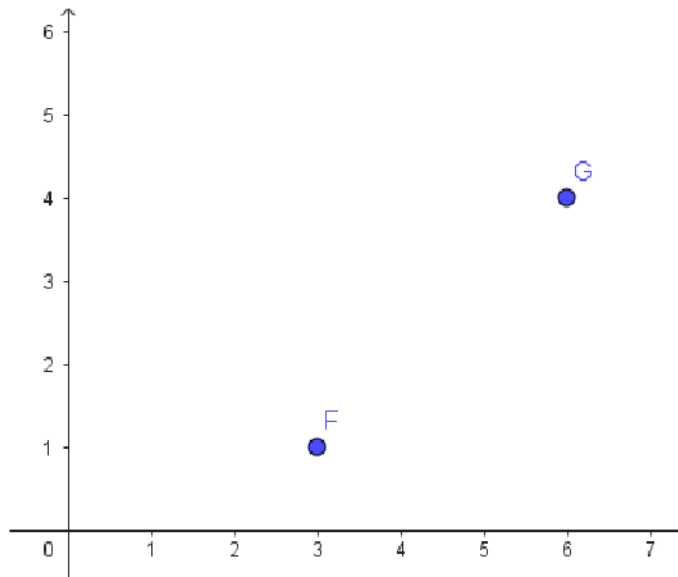


Figura 40 - Exercício 2 - Figura do GeoGebra

### Resolução tradicional:

A menor distância entre dois pontos quaisquer  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  é dada pela fórmula

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Logo, a distância entre as fazendas será:

$$d(F, G) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

### Resolução usando vetores:

A distância procurada é a norma do vetor  $\overrightarrow{FG}$  dado por:

$$\overrightarrow{FG} = G - F = (6 - 3, 4 - 1) = (3, 3)$$

Então a distância será dada por

$$\|\overrightarrow{FG}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

**Exercício 3:** Verifique se os pontos  $A(1,3)$ ,  $B(3,-1)$  e  $C(-2,9)$  são colineares.

**Resolução tradicional:**

Vamos inicialmente determinar a reta que passa por  $A$  e  $B$  e depois verificar se o ponto  $C$  pertence a essa reta. Determinando a equação geral da reta, temos

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 2y - 10 = 0$$

Substituindo as coordenadas de  $C$  nessa equação, temos

$$4 * (-2) + 2 * 9 - 10 = -8 + 18 - 10 = 0$$

Logo,  $C$  pertence a reta que passa por  $A$  e  $B$  e, portanto, os pontos são colineares.

**Resolução usando vetores:**

Vamos verificar se os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$  são paralelos. Em caso positivo, os pontos são colineares. Temos que

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, -1 - 3) = (2, -4)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-2 - 3, 9 + 1) = (-5, 10)$$

Como  $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{5} * \overrightarrow{AB}$ , os vetores são paralelos e, portanto, os pontos são colineares.

**Exercício 4:** Determine a área do triângulo que possui vértices nos pontos  $A(2,1)$ ,  $B(-1,0)$  e  $C(0,3)$  do plano cartesiano.

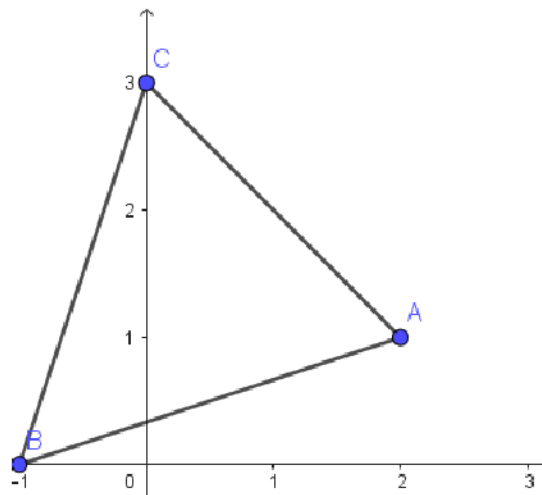


Figura 41 - Exercício 4 - Figura do GeoGebra.

**Resolução tradicional:**

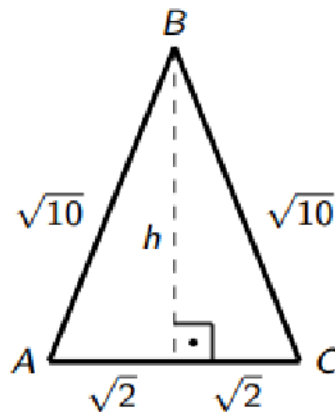
Vamos determinar o valor dos lados do triângulo, para isso temos que calcular as distâncias entre os pontos  $A$  e  $B$ ,  $A$  e  $C$  e  $C$  e  $B$ .

$$AB = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(0 - 2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(0 + 1)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{10}$$

Logo,  $ABC$  é um triângulo isósceles de base  $AC$ .



**Figura 42** - Exercício 4 - triângulo isósceles - Fonte: Elaborada pela autora

Calculando sua altura  $h$ , temos que

$$(\sqrt{10})^2 = h^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Assim, a área é

$$\text{Área} = \frac{2\sqrt{2} * 2\sqrt{2}}{2} = 4 \text{ u. a.}$$

**Resolução usando vetores:**

A área procurada é metade da área do paralelogramo determinada pelos vetores  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$ . Sendo

$$\overrightarrow{BA} = (2 + 1, 1 - 0) = (3, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0 + 1, 3 - 0) = (1, 3)$$

A área do paralelogramo é a norma do produto vetorial entre os vetores  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$ . Calculando esse produto, temos

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 8\vec{k} = (0,0,8)$$

Então, a área do triângulo será

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + 8^2}}{2} = 4 \text{ u. a.}$$

**Exercício 5:** Determine a área do quadrilátero que possui vértices nos pontos  $A(1,1)$ ,  $B(4,-3)$ ,  $C(4,1)$  e  $D(7,-3)$  do plano cartesiano.

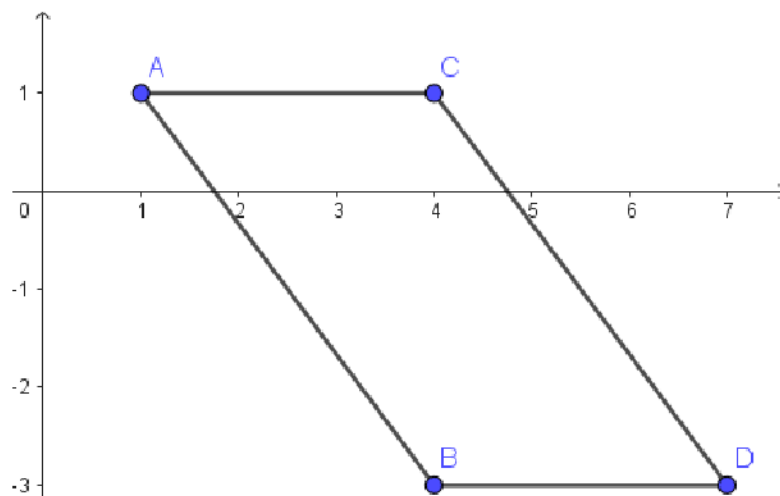


Figura 43 - Exercício 1 - Imagem do GeoGebra

### Resolução tradicional:

Vamos inicialmente calcular os lados do quadrilátero:

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$BD = \sqrt{(7-4)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$CD = \sqrt{(7-4)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Observamos que os lados opostos são congruentes, logo se trata de um paralelogramo. Observamos também que a diagonal  $BC$  é paralela ao eixo  $y$  e o lado  $BD$  é paralelo ao eixo  $x$ . Logo, esses segmentos, assim como os eixos, são perpendiculares. Então  $BC$  é a altura do paralelogramo, enquanto  $BD$  é sua base. Calculando  $BC$  temos:

$$BC = \sqrt{(4-4)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Como a área do paralelogramo é o produto de sua base por sua altura, temos que a área é igual a

$$\text{Área} = 3 * 4 = 12$$

**Resolução usando vetores:**

Após chegarmos à conclusão que se trata de um paralelogramo podemos calcular a área por meio do produto vetorial dos vetores  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BD}$ :

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1 - 4, 1 + 3) = (-3, 4)$$

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (7 - 4, -3 + 3) = (3, 0)$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12\vec{k} = (0, 0, 12)$$

$$\text{Área} = \|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 12^2} = 12$$

#### **4. CONCLUSÃO**

Ao refletir sobre a jornada de aprendizado de vetores e sua integração ao currículo do ensino médio, é evidente que a incorporação dessa abordagem pode oferecer benefícios consideráveis. A introdução de vetores não apenas complementa os métodos de ensino tradicionais, mas também proporciona aos alunos uma ferramenta adicional para compreender conceitos geométricos e algébricos de maneira mais integrada e aplicada.

Embora a implementação de vetores possa inicialmente parecer desafiadora, tanto para educadores quanto para estudantes, os exemplos apresentados nas atividades sugeridas demonstram como sua aplicação pode simplificar e elucidar problemas matemáticos complexos. Por exemplo, calcular o ponto médio de um segmento ou determinar a menor distância entre dois pontos são tarefas que se beneficiam diretamente da compreensão de vetores, oferecendo aos alunos uma visão mais concreta e prática da matemática.

No entanto, é importante reconhecer que a eficácia desta abordagem depende significativamente da disposição e do preparo dos professores para integrar novos conteúdos de forma eficaz. Além disso, a adaptação dos currículos deve ser feita de maneira cuidadosa, considerando os diferentes ritmos de aprendizado dos alunos e a necessidade de uma base sólida em conceitos matemáticos básicos antes de introduzir tópicos mais avançados.

Em conclusão, a inclusão de vetores no ensino médio representa uma oportunidade valiosa para enriquecer o currículo, estimular o interesse dos alunos e melhorar a compreensão matemática. No entanto, é crucial que essa integração seja acompanhada de suporte adequado para educadores e um planejamento curricular bem estruturado, garantindo que todos os alunos possam se beneficiar desta ferramenta poderosa sem se sentirem sobrecarregados. Assim, a introdução de vetores no ensino médio pode ser uma evolução positiva, desde que implementada com consideração e cuidado.

## 5. REFERÊNCIAS

ASSEMANY, Daniella. Uma proposta Metodológica para Geometria Vetorial no Ensino Médio. **Revista Multimídia de Investigação em Educação**. Vol 3, número 2. Universidade do Porto. Porto, 2017

ASSEMANY, Daniella et al. A Influência de uma Abordagem Vetorial para o Ensino Médio na Aprendizagem de Cálculo. VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática. Montevideu, 2013.

BITTAR, Marilena. O Ensino de Vetores e os Registros de Representação Semiótica. In S.D.A. Machado (org.), **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. 8ª ed. Editora Papirus: São Paulo, 2013.

CHALEGA, Josimilson de Freitas. **Estudo de vetores no ensino médio para resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Instituto de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, 2018.

FREITAS, Alessandro; SILVA FILHO, Olavo Leopoldino da; FERREIRA, Marcello. Ensinando Vetores Para o 1º Ano do Ensino Médio: proposta de Ensino Investigativo com o uso do experimento “Roda de Vetores”. **Revista do Professor de Física**, [S. l.], v. 3, n. Especial, p. 35–36, 2019.

LOPES, Gláucia. **Brincando com Vetores: uma Análise das Grandezas Vetoriais no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.

RIGONATTO, Marcelo. **Introdução ao Estudo dos Vetores e Aplicações no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em profissional em Matemática) – Universidade de Goiás. Goiânia, 2018.

SALVATORE, Alexandre Dias. **A utilização de vetores auxiliando o aprendizado de Geometria Analítica no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2019.

STEINBRUCH, Alfredo; Winterle Paulo. **Geometria Analítica**. 2ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2003.