



**UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES DIDÁTICAS PARA O ESTUDO DE  
FUNÇÕES EXPONENCIAIS BASEADA NA MODELAGEM  
MATEMÁTICA E EM PRINCÍPIOS DE APRENDIZAGEM  
COLABORATIVA E COOPERATIVA**

João Alves

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pela Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Mônica Helena Ribeiro Luiz.

São Paulo  
2020



Catalogação na fonte  
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo  
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

a474p

Alves, João

Uma proposta de atividades didáticas para o estudo de funções exponenciais baseada na Modelagem Matemática e em princípios de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa. / João Alves. São Paulo: [s.n.], 2020.

94 f.

Orientadora: Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro Luiz.

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2020.

1. Funções Exponenciais. 2. Modelagem Matemática. 3. Aprendizagem Colaborativa. 4. Aprendizagem Cooperativa. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD



JOÃO ALVES

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES DIDÁTICAS PARA O ESTUDO DE  
FUNÇÕES EXPONENCIAIS BASEADA NA MODELAGEM  
MATEMÁTICA E EM PRINCÍPIOS DE APRENDIZAGEM  
COLABORATIVA E COOPERATIVA

Dissertação de mestrado apresentada em 08  
de dezembro de 2020 como requisito parcial  
para obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Mônica Helena Ribeiro Luiz  
Instituto Federal de São Paulo  
Orientadora e Presidente da Banca

---

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho  
Instituto Federal de São Paulo  
Membro da Banca

---

Prof<sup>a</sup>. M<sup>a</sup>. Elizabete Leopoldina da Silva  
Centro Universitário das Faculdades Metropolitanas Unidas  
Membro da Banca



*À minha esposa Gislene, aos meus  
filhos Ana Luíza e João Gabriel e aos  
meus pais Osvaldino e Antônia.*





## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente aos meus pais, que sempre me incentivaram e me cobraram para que tivesse dedicação aos estudos, e aos amigos e colegas que, durante o curso, sempre se mostraram parceiros nesta caminhada.

Agradeço à Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Monica, minha orientadora, por toda a ajuda e empenho durante o processo de elaboração da dissertação.

Agradeço também aos professores do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), campus São Paulo, que me ensinaram muito mais do que os conteúdos necessários para as disciplinas cursadas.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) por oportunizar o PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede.

Um agradecimento especial aos meus filhos, Ana Luíza e João Gabriel, por todas as vezes que compreenderam (outras nem tanto) a necessidade de dedicação para concluir essa etapa de estudos, dedicação que muitas vezes se fez por meio de renúncias de tempo para estar com eles.

Um agradecimento maior ainda à minha esposa Gislene, que tornou a maior incentivadora para a conclusão desse curso, era a pessoa que não me deixava esmorecer diante de dificuldades, era a energia que surgia para me fazer seguir em frente quando o cansaço parecia que não permitiria continuar.



*“Um bom ensino da Matemática forma  
melhores hábitos de pensamento e habilita o  
indivíduo a usar melhor a sua inteligência.”*

*Irene de Albuquerque*



## RESUMO

O presente trabalho propõe uma sequência de atividades a ser desenvolvida junto a alunos da primeira série do Ensino Médio a fim de ensiná-los funções exponenciais. A elaboração dessa sequência esteve pautada na incorporação de princípios de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa para trabalhos em grupo e em sua integração ao processo de Modelagem Matemática. A inflação foi o tema escolhido como norte tanto por estar presente no dia a dia dos alunos como por se relacionar com a função exponencial no processo de Modelagem Matemática. Em relação aos princípios de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa, foi realizado um estudo bibliográfico que favorecesse à sua compreensão, destacando ainda as semelhanças e diferenças entre eles. Já os princípios de Modelagem Matemática aplicados neste trabalho estão alinhados com o trabalho de Rodney Carlos Bassanezi (2002). Espera-se que a sequência de atividades seja um recurso adicional para o trabalho com funções exponenciais, possibilitando posteriormente um estudo qualitativo quanto aos resultados de sua aplicação.

**Palavras-chave:** Funções Exponenciais; Modelagem Matemática; Aprendizagem Colaborativa; Aprendizagem Cooperativa.



## **ABSTRACT**

The present work suggests a sequence of activities to be developed with first grade students in high school to teach them Exponential Function. This sequence was based on principles of Collaborative and Cooperative Learning for group activities, and its incorporation to the process of Mathematical Modeling. We chose the inflation rate as our guide due to its presence in the students' daily life, and its relationship with Exponential Function in the process of Mathematical Modeling. Regarding the principles of Collaborative and Cooperative Learning, we carried out a bibliographic study, highlighting similarities and differences between them. As for the principles of Mathematical Modeling applied in this work, they are aligned with the ideas of Rodney Carlos Bassanezi (2002). We hope these activities will be an additional resource for the learning of Exponential Function, subsequently enabling a qualitative study as to the results of its application.

**Keywords:** Exponential Functions; Mathematical Modeling; Collaborative Learning; Cooperative Learning.





## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 1: Esquema de um processo de Modelagem Matemática apresentado por Bassanezi (2002) .....	37
Figura 2: Gráfico de $f(x) = ax$ com $a > 1$ .....	59
Figura 3: Gráfico de $f(x) = ax$ com $0 < a < 1$ .....	59
Figura 4: Valor equivalente a R\$ 100,00 em 1994 e 2019 .....	62
Figura 5: Representação esquemática de uma atividade baseada no método cooperativo de aprendizagem para sala de aula em quebra-cabeças .....	65
Figura 6: Exemplo de preenchimento da planilha eletrônica, no <i>Microsoft Excel</i> , para realização da atividade proposta no Encontro 5.....	80
Figura 7: Exemplo de tabela no <i>Microsoft Excel</i> para calcular o valor corrigido pelo IPC da cesta básica no período de 1995 a 2018.....	81
Figura 8: Gráfico de dispersão da evolução do valor equivalente a R\$ 100,00 corrigidos pela inflação no período de 1995 a 2018.....	82
Figura 9: Gráfico de dispersão da evolução do valor da cesta básica corrigidos pela inflação do IPC no período de 1995 a 2018 .....	83
Figura 10: Exemplo de planilha com a fórmula para calcular o valor equivalente a R\$ 100,00 .....	84
Figura 11: Exemplo de planilha com a fórmula para calcular o valor da cesta básica .....	85
Figura 12: Comparação do Valor Equivalente a R\$ 100,00 corrigidos pela média do IPC anual e pelo IPC anual .....	85
Figura 13: Comparação dos valores da cesta básica corrigidos pelo IPC e pela média do IPC anual.....	86



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
INTRODUÇÃO .....	21
1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	25
1.1 APRENDIZAGEM COLABORATIVA .....	26
1.2 APRENDIZAGEM COOPERATIVA .....	29
1.3 DIFERENÇAS E SEMELHANÇAS ENTRE AS APRENDIZAGENS COOPERATIVA E COLABORATIVA.....	32
1.4 MODELAGEM MATEMÁTICA .....	34
1.4.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM .....	34
1.4.2 O PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA .....	36
1.5 CONSIDERAÇÕES .....	40
2 A FUNÇÃO EXPONENCIAL .....	41
2.1 CONCEITOS PRELIMINARES.....	41
2.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL .....	49
3 ATIVIDADE PROPOSTA.....	61
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	89
REFERÊNCIAS.....	91



## INTRODUÇÃO

Nos tempos atuais, muito se discute sobre o papel da Escola como agente formador de cidadãos críticos capazes de promover mudanças significativas na sociedade. A vivência que se desenvolve dentro dela faz com que possa vir a ser um grande agente de transformação social. Contudo, muitas vezes essa capacidade concorre com métodos de ensino e aprendizagem que favorecem a competição, o individualismo e o princípio de seleção dos melhores.

Com frequência, a Escola passa a ser olhada apenas como uma fase de preparação para a seleção do aluno para o mercado de trabalho ou a carreira acadêmica ou técnica. Essa maneira de ver a Escola, de acordo com Tavares e Sanches (2013), dá-se pelo fato de que o sistema educacional brasileiro é baseado na crença de que o sucesso de alguns depende do insucesso dos demais, além da tentativa de individualizar o sujeito, sem oferecer formas de compartilhamento do conhecimento entre os alunos.

No sistema educacional brasileiro, predominam o ensino e a aprendizagem centrados no professor, atribuindo a ele o papel de detentor do conhecimento e gerando uma hierarquia de poderes na qual, segundo Costa *et al.* (2012) e Santos *et al.* (2012), os alunos devem ser sujeitos passivos e receptivos que buscam executar suas tarefas de forma individualista e competitiva.

Uma grande mudança se faz necessária na Escola. Deve-se proporcionar aos alunos o desenvolvimento de competências e habilidades que ampliem sua capacidade de argumentação, interpretação e resolução de problemas e desafios postos cotidianamente pela vida em sociedade. Mas não basta que o professor, em uma tentativa de trabalhar essa mudança, programe trabalhos e atividades em grupos que ainda recaiam em uma postura competitiva por parte dos alunos. Isso pode causar confusão entre os estudantes no que diz respeito aos papéis que devem desempenhar durante as atividades (SÁNCHEZ; SERRA, 2008).

Quando o ensino é realizado a partir dos princípios de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa, foca-se no desenvolvimento de competências, habilidades e responsabilidades, pois, ao longo das atividades, os alunos são incumbidos a papéis específicos dentro do grupo. Durante o processo de interação,

os alunos começam a ter uma ideia sobre a forma com a qual eles podem atuar em seus novos papéis dentro do processo de ensino e aprendizagem, buscando assim contribuir para que o grupo chegue a um resultado comum. Os alunos passam a ser sujeitos ativos, porque há uma descentralização do diálogo e, ao discutirem entre si, estabelecem formas que permitem gerar conhecimento em conjunto.

Pode-se ressaltar ainda que, ao se propor o uso de atividades que sejam desenvolvidas com os princípios de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa, o professor deve planejar-se bem, tendo claros seus objetivos. Com isso, durante a formação dos grupos, ele conseguirá transmitir aos alunos a importância deles dentro da equipe e a necessidade de que cada um possa desenvolver seu papel de maneira eficiente para atingir os objetivos propostos. Assim, ele leva aos estudantes um leque maior de recursos que os permite aprender de forma mais participativa, o que, além de atribuir mais significado ao que se aprende, auxilia no desenvolvimento de habilidades socioemocionais importantes para a formação de um cidadão mais bem preparado para a vida na sociedade atual.

De acordo com Bassanezi (2002), a aplicação da metodologia de Modelagem Matemática baseada em temas relacionados diretamente com o cotidiano dos alunos favorece seu interesse em participar de maneira mais ativa do processo de ensino e aprendizagem. Assim, incorporando princípios de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa dentro do processo de Modelagem, desenvolvem-se habilidades matemáticas e socioemocionais nos estudantes.

Por consequência do uso de princípios da Modelagem Matemática para atividades didáticas, surge o desenvolvimento de habilidades de pesquisa, como questionamento, organização, tratamento de informações e validação de respostas. Quando o aluno passa a reconhecer que tem o domínio dessas competências, torna-se mais preparado para refletir sobre os mais diversos problemas que possam existir em sua vida diária e usá-las para interagir de forma mais positiva com sua realidade.

Segundo Bassanezi (2002), quando a aprendizagem ocorre por meio da Modelagem Matemática, há uma facilidade em combinar aspectos lúdicos da Matemática com seu potencial em aplicações. E ainda é possível destacar que:

Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo. (BASSANEZI, 2002, p. 19).

Assim, na busca por fazer uma reflexão sobre uma porção da realidade, a proposta de atividades desenvolvidas trabalhou o tema da inflação, um fenômeno econômico que gera impactos significativos no cotidiano das famílias. A compreensão de suas consequências na vida diária é uma forma valiosa de motivar os alunos quanto à realização das atividades. Por trás disso, há a intenção de levar, por meio do trabalho com elementos de Modelagem Matemática, à formulação de modelos que podem se mostrar importantes no estudo de funções exponenciais.

Para melhor explicar o processo de construção e os resultados dessas atividades, dividiu-se este trabalho em três capítulos.

No Capítulo 1, é apresentada uma fundamentação teórica sobre Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa e sobre Modelagem Matemática. O objetivo do estudo acerca das Aprendizagens Colaborativa e Cooperativa é analisar suas semelhanças e diferenças, destacando os pontos que podem ser implementados no trabalho juntamente com a Modelagem Matemática.

No Capítulo 2, são apresentados os conceitos teóricos sobre as funções exponenciais.

Já no Capítulo 3, são propostas atividades didáticas para o estudo de funções exponenciais, algumas atividades estão baseadas em princípios de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa, outras em Modelagem Matemática e outras em ambas, tendo como tema norteador a inflação.

Finalmente são apresentadas as Considerações Finais do trabalho.





## 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Quando se discute ensino e aprendizagem, em geral, atribui-se a esse processo dois agentes: o professor e o estudante. É comum ainda discutir como esses dois agentes interagem entre si e como a interação com um determinado conceito ou tema ocorre. Contudo, é preciso ter um olhar mais amplo, que vá além dessa relação. Existem outros fatores que também podem interferir, como a sociedade, as metodologias, o ambiente, o acesso aos meios de cultura etc.

Pode-se ainda considerar o processo de ensino e aprendizagem como algo inerente ao indivíduo, quer seja na Escola, quer seja em outras situações. Rogers (1972) apresenta uma distinção entre dois tipos de processo de aprendizagem. Um se apresenta por meio de uma relação com o desenvolvimento de habilidades fundamentais e técnicas para a realização de tarefas que não necessariamente fazem sentido a quem as executa. O outro se refere a um processo de aprendizagem por meio de experiências, que podem ser cotidianas ou coordenadas em sala de aula, que se destaca por ser mais eficaz, uma vez que se faz carregado de sentidos. E, por isso, faz-se necessária a busca por romper com um processo de ensino e aprendizagem que esteja pautado apenas na transmissão de informações e memorização de conceitos, fórmulas e regras.

Infelizmente, no cenário da educação brasileira, ainda existe uma forte resistência a esse rompimento. Essa resistência pode ser devido a uma estrutura burocrática, que muitas vezes impossibilita mudanças, ou ainda pode estar intimamente ligada aos agentes, materiais e recursos didáticos disponibilizados. Estes possuem uma conexão muito grande com o processo de formação histórica da educação brasileira, que está pautado na defesa do tradicionalismo metodológico e didático, e se faz presente ainda hoje no meio escolar. Esse tradicionalismo, de acordo com Saviani (1991), está relacionado com a forma de organização da Escola no início do século passado, quando as iniciativas educacionais cabiam unicamente ao professor. Assim, buscava-se um profissional razoavelmente bem preparado para atender as diversas demandas do ensino. A maneira como esse docente atuava estava organizada pela exposição dos conteúdos e lições. Por sua vez, os discentes acompanhavam com atenção e aplicavam os conceitos em exercícios que deveriam realizar disciplinadamente.

Porém, muitos defendem que o processo de ensino e aprendizagem deve ter um significado e relevância para o aluno para que, a partir disso, ele seja um cidadão capaz de realizar transformações sociais. Segundo Freire (1991), não é suficiente que a população tenha acesso, frequente a escola e receba instruções sobre as diferentes componentes curriculares. Alunos e professores devem atuar juntos para construir um saber que considere as necessidades dos indivíduos, e estes possam se tornar agentes transformadores da sociedade e de sua própria vida.

Neste capítulo, primeiramente são apresentados princípios de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa, que, de acordo com Torres e Irala (2007), vêm apresentando ganhos significativos dentro do processo de ensino e aprendizagem tanto no que diz respeito ao desenvolvimento de habilidades específicas relacionadas às componentes curriculares quanto em habilidades socioemocionais. Também são destacadas as semelhanças e diferenças entre tais aprendizagens. Por fim, são apresentados aspectos de Modelagem Matemática e seu uso no processo de ensino e aprendizagem.

## **1.1 APRENDIZAGEM COLABORATIVA**

O termo colaboração vem ganhando destaque dentro do cenário educacional, e seu emprego vem sendo defendido por muitos pesquisadores do tema. Primeiramente, pode-se destacar a definição dicionarizada que, de acordo Houaiss (2001), é derivado do latim – *collaborare* –, cujo significado pode ser entendido como ajuda, auxílio, participação em obra alheia, ideia que contribui para a realização de uma tarefa ou trabalho, o mesmo que cooperação. Nesse caso, pode-se dizer que colaboração é a realização de uma tarefa com a participação de, pelo menos, dois indivíduos.

Para Garbin (2010), a definição de colaboração é dada ao diferenciá-la de conceitos que se aproximam dela, como a interação, cooperação, mediação e interação social. Segundo a autora, o termo colaboração está relacionado a um processo no qual um grupo com um objetivo em comum busca a construção de um caminho ou o estabelecimento de meios para que tal objetivo seja alcançado. Durante

esse processo, é necessário que ocorram tomadas de decisões em conjunto e o emprego de estratégias e atitudes com essa finalidade.

Já para Damiani (2008), a colaboração está relacionada ao engajamento dos estudantes na realização de atividades no ambiente escolar. A autora afirma que a colaboração é capaz de possibilitar um trabalho com caráter interativo pautado no diálogo e na construção de um repertório de argumentações, com o compartilhamento das experiências, dos saberes e vivências, a compreensão e internalização de normas, assim como o desenvolvimento de hábitos. Todos esses fatores contribuem para o desenvolvimento de pessoas que tenham formas únicas de conhecer e interagir de forma consciente sobre a realidade na qual estão inseridas.

Buscando um complemento a essas ideias, Alcântara, Behrens e Carvalho (2001) afirmam que:

A aprendizagem colaborativa é um processo de reaculturação que ajuda os estudantes a se tornarem membros de comunidades de conhecimento cuja propriedade comum é diferente daquelas comunidades a que já pertence. Assume, portanto, que o conhecimento é socialmente construído e que a aprendizagem é um processo sociolinguístico. (ALCÂNTARA, BEHRENS e CARVALHO, 2001, p.49).

Embora de uma forma um pouco restrita, Johnson e Johnson (1999) definem uma estratégia de ensino e aprendizagem em grupos que pode ser associada à Aprendizagem Colaborativa. Os autores definem essa estratégia da seguinte forma:

[...] conjunto de métodos para a aplicação em grupos com o objetivo de desenvolver habilidades de aprendizagem, conhecimento pessoal e relações sociais, onde cada membro do grupo é responsável tanto pela sua aprendizagem como pela do restante do grupo. (JOHNSON; JOHNSON, 1999. p. 14).

A partir dessa definição e associação, pode-se dizer que decorrem ao menos três ideias centrais: a primeira se relaciona com os métodos empregados; a segunda, com o autoconhecimento e desenvolvimento das relações pessoais; e a terceira está associada ao desenvolvimento da corresponsabilidade no processo de ensino e aprendizagem. Essas ideias são descritas com mais detalhes a seguir.

## **Métodos empregados**

Refere-se ao conjunto de métodos para a aplicação em grupos que busca a modificação das relações dentro do processo de ensino e aprendizagem entre os estudantes e entre eles e professores. A aplicação desses métodos deve ser direcionada para atividades que possibilitem a modificação dessas relações, tanto em sala de aula como fora dela. O ideal é que os alunos utilizem o princípio do trabalhar em grupos não somente para as tarefas propostas, mas também em outras atividades dentro da escola e até fora dela, e que percebam e reconheçam sua importância dentro do processo de ensino e aprendizagem.

## **Autoconhecimento e desenvolvimento das relações pessoais**

Está presente tanto no desenvolvimento de habilidades sociais e individuais quanto na aquisição de conhecimento. O foco dessa forma de atuação está no que se aprende e na maneira como se aprende e, assim, os alunos são levados a estabelecer novas formas de se relacionar, de viver e de aprender. Nessas novas formas de convivência com seus pares, os alunos desenvolvem habilidades que permitem a aquisição de conhecimento, melhores formas de expressar e compartilhar suas ideias e aceitar a diversidade.

## **Desenvolvimento da corresponsabilidade no processo de ensino e aprendizagem**

O esforço pelo desenvolvimento da corresponsabilidade apresenta-se como uma das características essenciais da Aprendizagem Colaborativa, pois deve permitir que cada estudante reflita e atue de forma a garantir, além da sua própria aprendizagem, a aprendizagem do resto do grupo, e a buscar o objetivo comum, que depende do êxito de todos.

Pode-se atribuir o destaque que a Aprendizagem Colaborativa vem ganhando na educação ao fato dela priorizar, no desenvolvimento de atividades, um reposicionamento dos atores ao delegar um papel de protagonismo,

interdependência, autonomia, resolução de conflitos e estabelecimento de relações sociais mais saudáveis aos alunos. Sobre a Aprendizagem Colaborativa, Torres e Irala (2007) afirmam que:

[...] espera-se que ocorra a aprendizagem como efeito colateral de uma interação entre pares que trabalham em sistema de interdependência na resolução de problemas ou na realização de uma tarefa proposta pelo professor. Segundo alguns estudiosos desse tipo de aprendizagem, a interação em grupos realça a aprendizagem, mais do que em um esforço individual. Uma aprendizagem mais eficiente, assim como um trabalho mais eficiente, é colaborativa e social em vez de competitiva e isolada. A troca de ideias com outras pessoas melhora o pensamento e aprofunda o entendimento. (TORRES e IRALA, 2007, p. 65).

A Aprendizagem Colaborativa consiste, portanto, em um processo de ensino e aprendizagem que tem como objetivo a construção do conhecimento como resultado das interações entre os envolvidos, por meio de uma contribuição ativa dos estudantes. Destaca-se, assim, o novo papel do professor, que passa de centralizador para mediador, tornando-se mais próximo dos alunos e de seus objetivos de aprendizagem.

## **1.2 APRENDIZAGEM COOPERATIVA**

O termo cooperação, apresentado por Houaiss (2001), é derivado do latim – *cooperativo* – e traz o significado de prestar auxílio ou dar contribuição para um fim comum.

Dentro do contexto educacional, o termo cooperação se faz presente em uma abordagem do processo de ensino e aprendizagem que data de muitos séculos atrás e, segundo Johnson e Johnson (1999), apresenta um longo futuro. Para esses autores, a Aprendizagem Colaborativa apresenta uma história rica de teoria, de investigação e de uso em sala de aula, demonstrando ser uma prática educativa bem distinta das praticadas tradicionalmente, uma vez que busca o desenvolvimento de habilidades sociais e de métodos de interação entre os alunos.

Segundo Garbin (2010), a cooperação dentro do processo de ensino e aprendizagem aparece ligada ao desenvolvimento, por um grupo, de um projeto que tenha um objetivo comum. Para que esse projeto se desenvolva, deve-se ter um líder que assumirá a responsabilidade de garantir o desenvolvimento das atividades por

cada integrante. Cabe destacar que cada integrante assume um papel bem definido para execução das tarefas e a conclusão do projeto estará condicionada ao compromisso de cada um dos membros em cumprir sua tarefa.

Segundo Johnson e Johnson (1999), para que uma atividade esteja de acordo com os princípios da Aprendizagem Colaborativa, ela deve contemplar cinco elementos essenciais: a interdependência positiva; a responsabilidade individual e de grupo; a interação estimuladora; as competências sociais; e o processo de grupo ou avaliação do grupo. Esses elementos são descritos a seguir.

### **Interdependência positiva**

Para Johnson e Johnson (1999), a interdependência positiva pode ser considerada como um dos elementos principais da Aprendizagem Colaborativa, pois se caracteriza como uma forma de dependência mútua entre os integrantes do grupo. Para que seja possível desenvolver essa relação de dependência mútua, deve-se implementar estratégias que apresentem uma divisão de tarefas com diferenciação dos papéis entre os integrantes. A interdependência positiva cria nos membros um compromisso para que a atuação de cada um seja pautada na busca pelo seu sucesso e pelo sucesso de todos. Segundo Lopes e Silva (2009), a interdependência positiva se faz presente nos grupos quando se observa o uso de expressões do tipo “para que eu ganhe, todos nós devemos ganhar” ou “só conseguiremos realizar isso se nos unirmos e nos ajudarmos”. Afirmam ainda que a interdependência positiva é o fator que permite a construção de valores que revelam a verdadeira natureza da sociedade em que os alunos estão inseridos.

### **Responsabilidade individual e de grupo**

O conceito presente na responsabilidade de grupo consiste no comportamento que deve se assemelhar a um organismo vivo, com objetivos bem definidos. A responsabilidade individual ocorre quando os integrantes do grupo atuam como os órgãos vitais desse organismo e reconhecem que ele funcionará se cada órgão executar sua parte de forma harmônica aos demais.

A busca pelo desenvolvimento desse tipo de pensamento e comportamento fará com que os benefícios da interdependência positiva estejam presentes nas ações dos integrantes do grupo. Dessa forma, todos buscarão ações capazes de promover a coletividade, o que torna eficaz o trabalho em conjunto.

### **Integração estimuladora**

A integração estimuladora, que tem como princípio a interação face a face, facilita as diferentes formas de comunicação entre os integrantes do grupo, quer seja a comunicação verbal, quer seja a não verbal. Johnson e Johnson (1999) consideram que algumas atividades cognitivas e interpessoais só se realizam quando cada estudante atua promovendo a aprendizagem dos seus companheiros. O uso das diferentes formas de linguagem e comunicação entre os pares permitem uma melhor forma de integração entre os alunos para que cada um possa aprender e ensinar dentro da atividade proposta. Ao promover a integração estimuladora, cada membro do grupo estabelece um compromisso com os demais ao mesmo tempo em que busca alcançar os objetivos comuns.

### **Competências sociais**

O desenvolvimento de competências sociais é fundamental para que os grupos possam atuar no processo de ensino e aprendizagem de forma cooperativa. Dessas competências, pode-se destacar a liderança, a habilidade para se comunicar e a habilidade de gerir conflitos por meio da negociação.

### **Processo de grupo ou avaliação do grupo**

O processo de avaliação do grupo é o que permitirá aos alunos analisarem como suas ações estão contribuindo para que os objetivos previamente estabelecidos sejam alcançados, e como estão ou não contribuindo para que o trabalho seja realizado de forma que a aprendizagem de todos seja eficaz. A avaliação ainda pode

ser fonte de discussão e resolução dos conflitos que possam ter surgidos ao longo do desenvolvimento das atividades.

Johnson e Johnson (1999) reafirmam a necessidade da presença desses cinco elementos não só nos grupos que se apresentam de forma eficiente no trabalho cooperativo, mas na elaboração das atividades para que sejam disciplinadoras e haja as condições necessárias ao estabelecimento da cooperação.

A Aprendizagem Colaborativa deve, portanto, ser apresentada de forma estruturada para que os estudantes desenvolvam uma atividade ou um projeto com objetivos de aprendizagem bem definidos. A atuação de todos os integrantes no processo de ensino e aprendizagem deve visar à construção de meios para que os objetivos comuns sejam atingidos por todos. Ainda, deve-se buscar o desenvolvimento das habilidades sociais e promover uma reestruturação das relações entre os pares.

### **1.3 DIFERENÇAS E SEMELHANÇAS ENTRE AS APRENDIZAGENS COOPERATIVA E COLABORATIVA**

Nos dicionários, os termos cooperação e colaboração aparecem, em geral, como sinônimos, mas alguns autores questionam esse tratamento por reconhecerem diferenças entre o processo de cooperação e de colaboração.

Para Panitz (1999), a Aprendizagem Colaborativa tem no professor o papel central de controlador, uma vez que ele controla quais tarefas serão desenvolvidas e estabelece o papel que cada aluno assumirá durante a realização da tarefa. Já na Aprendizagem Cooperativa, a escolha da tarefa, a forma de realização e os papéis que cada aluno desenvolverá partem das escolhas dos próprios estudantes. O papel do professor é de mediador.

Garbin (2010) apresenta indicadores que podem ser usados para caracterizar o conceito da colaboração dentro do processo de ensino e aprendizagem e que ainda servem como forma de estabelecer a diferença entre os conceitos de colaboração e cooperação, como apresentado no Quadro 1.



Quadro 1: Indicadores de Colaboração, de acordo com Garbin (2014)

<b>Indicadores</b>	<b>Colaboração</b>	<b>Cooperação</b>
Relação interpessoal	Pressupõe contato com mais pessoas.	Pressupõe contato com mais pessoas.
Formação de grupos	Heterogêneo	Sem restrições
Comunicação	Bidirecional	Unidirecional
Envolvimentos dos sujeitos nas tarefas	Embora ocorra uma divisão dos papéis, estes podem ser renegociados e ressignificados a todo instante.	Cada integrante tem um papel bem definido e diferenciado do dos demais.
Negociação de sentidos	É preciso chegar a um consenso.	É preciso chegar a um consenso.
Objetivos comuns	Pressupõe objetivos comuns.	Pressupõe objetivos comuns.
Divisão do trabalho	Todos são responsáveis por todas as etapas.	Necessidade de um líder que coordena as atividades individuais.
Ambiente diferenciado	Pode ocorrer no desenvolvimento de qualquer tarefa.	É preciso ter uma tarefa específica, por exemplo, relativa ao ambiente escolar.

Fonte: Adaptado de Garbin (2014, p. 15 e 16).

Para Garbin (2010), no cenário da cooperação existe uma ideia de hierarquia que deve ser mantida durante a realização da atividade, enquanto no cenário de colaboração essa hierarquia não deve existir, fato que se relaciona diretamente à perspectiva de uma ação colaborativa. Tais princípios estabelecem a principal diferença entre cooperação e colaboração.

Dentre as diferenças, ainda é possível destacar o papel do professor que, na Aprendizagem Colaborativa, mostra-se ainda de forma centralizadora no gerenciamento das atividades e no processo de realização delas, visto que lhe cabe a função de dar instruções para sua execução, enquanto na Aprendizagem Colaborativa esses papéis ficam a cargo dos alunos.

No que diz respeito às semelhanças, pode-se citar o papel do aluno, que em ambas as aprendizagens passa a ser mais ativo; a troca de experiências, que pode ser mais ou menos intensa em uma que na outra; e o desenvolvimento de habilidades intelectuais e socioemocionais que é um grande ganho em ambas as abordagens.

Por sua vez, Torres e Irala (2014) apresentam um perfil para aulas colaborativas e para aulas cooperativas:

Na aula cooperativa, o aluno participa em atividades estruturadas em grupos, trabalhando conjuntamente na resolução de uma série de problemas. Às vezes, um determinado aluno possui um papel específico dentro do seu grupo. Na aula colaborativa, o professor pede para que os membros do grupo se organizem e negociem entre eles mesmos quais serão seus papéis nos trabalhos do grupo. (TORRES e IRALA, 2014, p. 68).

Em ambas as práticas, o professor rompe com os modelos tradicionais de ensino que colocam toda a função do processo de ensino e aprendizagem nele. Com o uso das práticas de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa, o docente passa a ter uma intenção mais clara de tornar os alunos mais ativos e participativos, dando dinamismo e entusiasmo ao ensino e à aprendizagem.

Libâneo (1998) diz que o professor mediador é aquele que realiza a mediação entre a relação ativa do aluno com a matéria e com os conteúdos específicos de sua disciplina, sempre levando em conta o conhecimento, a experiência e o significado que o aluno apresenta durante o processo de ensino e aprendizagem, o desenvolvimento do seu potencial cognitivo, da sua capacidade, de seu interesse, do seu procedimento de pensar e trabalhar. O professor deve atuar de forma a respeitar e ampliar o conhecimento de mundo e prévio do estudante.

Pode-se dizer que, tanto na Aprendizagem Colaborativa quanto na Cooperativa, o foco da aprendizagem se estabelece por meio do desenvolvimento de habilidades sociais, pelo foco na interação entre os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Embora existam diferenças na forma com que essas interações ocorrem, é fato que elas permitem aos estudantes o desenvolvimento de uma aprendizagem que ganha muito mais significados.

## **1.4 MODELAGEM MATEMÁTICA**

### **1.4.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM**

Quando se fala em ensino de Matemática, em particular no Ensino Médio, os professores se deparam com alunos questionando a utilidade deste componente

curricular e, muitas vezes, tais questionamento estão relacionados ao fato dos alunos não perceberem uma relação entre o conteúdo e a vida em sociedade.

O uso da Modelagem Matemática como parte do processo de ensino e aprendizagem tem apresentado resultados satisfatórios nesse sentido. Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), o ensino de Matemática por meio da Modelagem pode tornar o desenvolvimento dos conteúdos mais dinâmicos e flexíveis. Ainda pode facilitar o desenvolvimento de mecanismos que permitem um grande avanço na reflexão e na ação de aplicar os conceitos.

O conhecimento construído no processo da Modelagem – quer seja por meio de temas que despertam o interesse dos alunos, quer seja pelas ferramentas matemáticas desenvolvidas – evidencia um grande potencial para o processo de ensino e aprendizagem. Almeida e Dias (2004) dizem que a Modelagem é capaz de proporcionar oportunidades aos alunos de identificar situações-problemas que fazem parte de sua realidade, despertando maior interesse nos estudos e desenvolvimento de conteúdos e conhecimento matemático.

Bassanezi (2002) afirma que a Modelagem atua como facilitadora para a aprendizagem dos estudantes, pois utiliza a combinação de aspectos lúdicos e de aplicações da Matemática. Diz ainda que a Modelagem Matemática deve ser usada como forma de aliar teoria e prática, motivando os estudantes na busca pela compreensão da realidade que os cercam.

Pode-se dizer que a Modelagem Matemática atua na construção de conhecimento que torna a compreensão da realidade mais efetiva e permite que o estudante tenha uma melhor interação com essa realidade, tornando-o, assim, um indivíduo mais preparado para assumir seu papel de cidadão.

Ao se propor um estudo sobre um fato ou situação real, é recomendável utilizar uma linguagem adequada para que seja possível uma maior compreensão e racionalização do pensamento. Quanto a isso, Bassanezi (2002) diz que:

O objetivo fundamental do “uso” de Matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a Matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que

estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI, 2002, p. 18).

Ainda segundo Bassanezi (2002), ao usar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, deve-se tentar se distanciar de situações que possam provocar uma apatia dos alunos, uma vez que essa forma de trabalho se diferencia da rotina de ensino que eles estão acostumados, pois, neste caso, o professor deixa de ser transmissor de conhecimento e torna-se mediador, colocando os alunos como o centro do processo de ensino e aprendizagem.

Bassanezi (2002) reconhece que possam surgir obstáculos ao uso da Modelagem Matemática quando diz que:

[...] A modelagem pode ser um processo muito demorado, não dando tempo para cumprir o programa todo. Por outro lado, alguns professores têm dúvida se as aplicações conexões com outras áreas fazem parte do ensino de Matemática, salientando que tais componentes tendem a distorcer a estética, a beleza e a universalidade da Matemática [...]. O uso de Modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. Os alunos estão acostumados a ver o professor como transmissor de conhecimentos [...]. (BASSANEZI, 2002, p. 37).

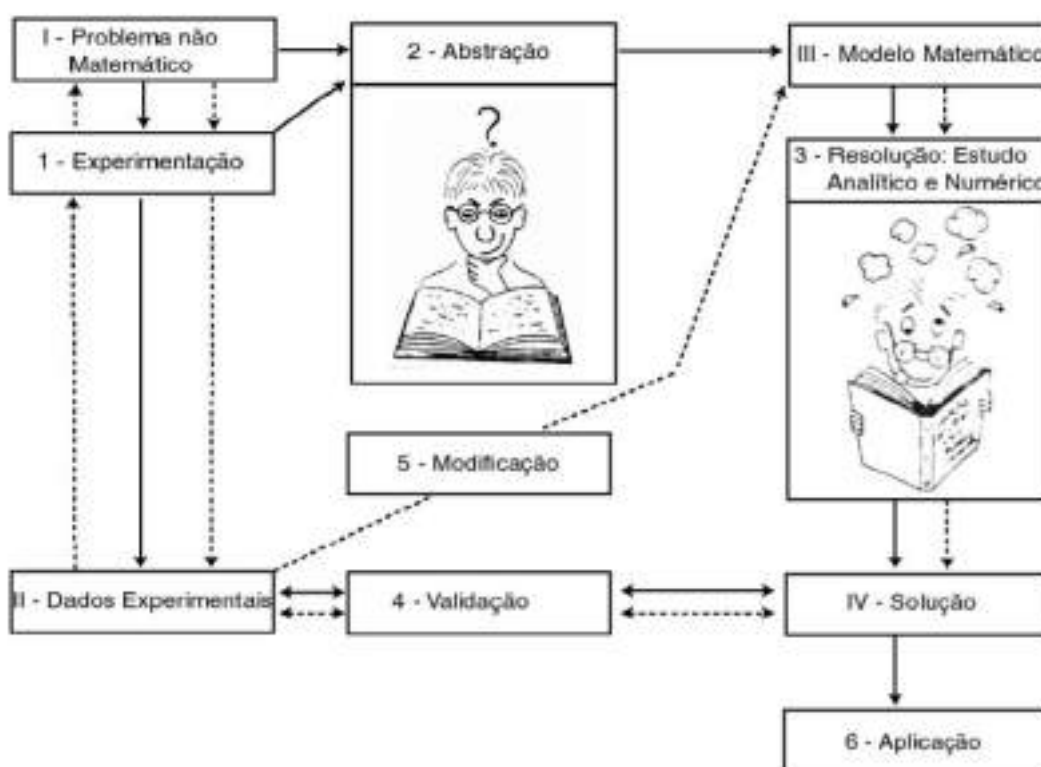
Como forma de buscar uma diminuição desses obstáculos, Bassanezi (2002) sugere que se modifique o processo clássico da Modelagem, que se leve em conta momentos de sistematização de conteúdos e, sempre que possível, use-se analogias com outras situações-problema. Bassanezi (2002) diz ainda que a Modelagem no ensino não deve se preocupar em chegar imediatamente a um modelo matemático bem-sucedido, mas sim caminhar seguindo etapas e, nelas, o conteúdo matemático dever ser sistematizado e aplicado. Dessa forma, o processo de ensino e aprendizagem acabará surgindo como resultado da interação do aluno com seu meio.

#### **1.4.2 O PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

O uso da Modelagem Matemática em sala de aula deve ser apresentado como uma forma de imersão dos alunos e professores no desenvolvimento das habilidades matemáticas por seus próprios meios. Assim, pode-se dizer que, ao utilizar a Modelagem Matemática, busca-se relacionar, explicar e apresentar formas de interpretações de fatos ou fenômenos por meio de expressões matemáticas.

Na Figura 1, é apresentado um esquema com as etapas que devem ser seguidas em um processo de Modelagem Matemática segundo Bassanezi (2002), sendo estas: experimentação; abstração; resolução; validação; modificação; aplicação. As setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de uma modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, conforme indicado pelas setas pontilhadas.

Figura 1: Esquema de um processo de Modelagem Matemática apresentado por Bassanezi (2002)



Fonte: Bassanezi (2002, p. 27).

Essas etapas, indicadas na Figura 1, são descritas a seguir.

## Experimentação

O primeiro passo do processo de Modelagem Matemática é a escolha do tema ou problema de estudo. Existem duas correntes que tratam desse passo: alguns dizem que a escolha do tema deve ser feita pelos alunos; outros, pelo professor pelo fato de se ter um currículo a cumprir, cabendo adequá-lo ao processo de Modelagem.

Em ambos os casos, o processo de experimentação se faz necessário para que ocorra a coleta de dados sobre o objeto de estudo. Essa coleta pode ser realizada de diferentes formas, mas sempre com o intuito de ampliar uma visão que se tenha sobre o tema ou problema proposto para o trabalho.

### **Abstração**

A etapa de abstração auxilia na formulação do modelo matemático. Na abstração, ocorre a seleção das variáveis, que devem estar bem definidas para o problema em estudo. Nessa etapa, o problema deve estar claro para que se possa formular as hipóteses.

O processo de formulação de hipóteses serve para que ocorra um direcionamento do processo de investigação. A formulação das hipóteses pode ocorrer pela observação dos fatos, da comparação com outros estudos já realizados, dedução lógica etc. A complexidade das hipóteses e das variáveis que se relacionam com o problema contribuem para a formulação do modelo matemático.

No processo de abstração e formulação do modelo matemático é comum ocorrer uma simplificação da interpretação do problema em estudo, pois este pode se apresentar de forma excessivamente complexa quando são consideradas todas as variáveis relacionadas. Dessa forma, deve-se fazer uma restrição para que seja possível caracterizar o problema real sem torná-lo complicado demais.

### **Resolução**

A resolução do modelo matemático, que normalmente tem sua complexidade relacionada com a das hipóteses de formulação, pode ocorrer tanto de forma analítica quanto por métodos computacionais. Essa fase relaciona o problema de estudo com teorias matemáticas conhecidas ou ainda com a formulação de novas teorias para que ocorra a solução do modelo proposto.

## **Validação**

Após a resolução, deve-se realizar a validação, que está relacionada com a aceitação ou não do modelo matemático. Para isso, o modelo e as hipóteses formulados devem ser testados e confrontados com os dados coletados na fase da experimentação. Também deve-se levar em consideração a comparação com os dados reais do problema em estudo. É comum o uso de gráficos das soluções obtidas para uma melhor comparação com os dados reais, avaliação das previsões e até mesmo melhorias no modelo desenvolvido para o estudo.

## **Modificação**

Durante o processo de validação, pode ser que o modelo em estudo tenha se afastado da realidade do problema. Nesse caso, deve-se modificar o modelo matemático desenvolvido. Vários fatores podem estar relacionados com a necessidade da reformulação, por exemplo, o uso de hipóteses falsas ou simplificadas que causaram uma descaracterização dos dados obtidos, erros na obtenção dos dados ou no desenvolvimento matemático do modelo, descarte de variáveis importantes etc.

Geralmente o aprofundamento do estudo de acordo com uma determinada teoria implica em uma reformulação dos modelos matemáticos obtidos, por isso pode-se afirmar que nenhum modelo matemático é definitivo.

## **Aplicação**

Uma vez validado, o modelo finalmente poderá ser aplicado e, dentro dos parâmetros delimitados no estudo, suas previsões poderão servir para direcionar tomadas de decisões sobre o problema real que o originou.

## 1.5 CONSIDERAÇÕES

A apresentação e comparação entre Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa não têm por finalidade determinar qual delas seria a melhor para ser aplicada em uma sala de aula, tampouco limitar as possibilidades de trabalho em grupos às propostas que elas apresentam.

A busca pela compreensão de como essas Aprendizagens favorecem o processo de ensino e aprendizagem, quer seja por desenvolver novas habilidades sociais e cognitivas, quer seja por meio das mudanças das relações entre professores e alunos e entre os próprios estudantes, é de grande importância para a proposição de atividades que estimulem a participação dos alunos na construção do conhecimento.

Nesse sentido, a Modelagem Matemática não aparece apenas como uma teoria a mais, mas se apresenta como uma possibilidade para que se desperte o interesse dos alunos em aprender, uma vez que possibilita compreender conceitos matemáticos por meio de contextualização e associações com problemas reais, levando a uma melhor compreensão do mundo e de novas formas de interagir sobre as diferentes realidades.



## 2 A FUNÇÃO EXPONENCIAL

O uso de funções para modelar diversos problemas do cotidiano não é algo novo dentro do estudo da Matemática. Nesse sentido, as funções exponenciais permitem modelar diversos fenômenos reais. Pode-se citar seu uso aplicado à modelagem do crescimento exponencial de populações, ao decaimento radiativo em Física e Química, à correção monetária com juros em Matemática Financeira, entre outros.

Neste capítulo, as definições e os resultados sobre potenciação e radiciação serão apresentados como sugestão aos professores que tiverem interesse no trabalho e desenvolvimento desse conteúdo. Dessa forma, nem todas as definições e propriedades devem ser trabalhadas necessariamente da forma apresentada.

As referências utilizadas nesta parte do trabalho formam Murakami e lezzi (2013), Murakami, lezzi e Dolce (2013), Guidorizzi (2001) e Toledo (2018).

### 2.1 CONCEITOS PRELIMINARES

**Definição 2.1 (Potência de expoente natural):** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A potência de base  $a$  e expoente  $n$  é o número  $a^n$  tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \text{ para } a \neq 0 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Dessa definição, segue-se que:

$$\begin{aligned} a^1 &= a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 &= a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 &= a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \\ &\vdots \\ a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n \text{ fatores}} \end{aligned}$$

O que permite concluir que, para  $n \geq 2$ ,  $a^n$  representa o produto de  $n$  fatores iguais a  $a$ .

**Proposição 2.2:** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $a \neq 0$  ou  $n \neq 0$ ,  $b \neq 0$  ou  $m \neq 0$ , então são válidas as seguintes propriedades:

- (1)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ , com  $a \neq 0$  ou  $m \neq 0$  e  $n \neq 0$ ;
- (2)  $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ , com  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$  ou  $m \neq 0$
- (3)  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ , para  $b \neq 0$ ;
- (4)  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ .

**Demonstração:** Para a demonstração dessas propriedades, será utilizado o Princípio da Indução Finita<sup>1</sup> (PIF).

(1) Aplicando o PIF sobre  $n$  e considerando  $m$  fixo, tem-se que a propriedade é verdadeira para  $n = 0$ , pois:

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$$

Supondo que, para  $n = p \geq 0$ , a propriedade seja verdadeira, isto é,  $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$  (hipótese de indução), é possível mostrar que a propriedade é verdadeira para  $n = p + 1$ . De fato:

$$a^m \cdot a^{p+1} = a^m \cdot (a^p \cdot a) = (a^m \cdot a^p) \cdot a^1$$

Pela hipótese de indução e pela Definição 2.1, segue-se que:

$$a^{(m+p)} \cdot a = a^{(m+p)+1} = a^{m+(p+1)}$$

Logo, pelo PIF, segue-se que a propriedade é verdadeira para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ .

(2) Pela Definição 2.1, segue-se que:

$$(a \cdot b)^m = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{m \text{ vezes}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ vezes}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{m \text{ vezes}} = a^m \cdot b^m$$

(3) Segue-se da Definição 2.1 que:

---

<sup>1</sup> Para aplicação do Princípio de Indução Finita (PIF) considera-se o conjunto dos Números Naturais  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{m \text{ vezes}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{m \text{ vezes}}} = \frac{a^m}{b^m}$$

(4) Sabe-se que  $(a^m)^n$  representa  $n$  fatores iguais a  $a^m$ , assim, pela Definição 2.1 e pela propriedade (1) desta proposição, segue-se que:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ vezes}} = a^{\overbrace{(m+m+\cdots+m)}^{n \text{ vezes}}} = a^{m \cdot n}$$

■

**Definição 2.3 (Potência de expoente inteiro negativo):** Sejam  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , define-se a potência  $a^{-n}$  por  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

Essa definição apresenta a potência de base real, não nula e expoente negativo como o inverso da correspondente potência de mesma base e de expoente inteiro positivo.

**Proposição 2.4:** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$  e  $m, n \in \mathbb{N}$ , é válida a seguinte propriedade para as potências  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ .

**Demonstração:** Aplicando o PIF sobre  $n$  e considerando  $m$  fixo, segue-se que a propriedade é verdadeira para  $n = 0$ , visto que:

$$\frac{a^m}{a^0} = \frac{a^m}{1} = a^m = a^{m-0}$$

Supondo que a propriedade seja válida para  $n = p$ , ou seja,  $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$ , basta mostrar que também será válida para  $n = p + 1$ .

De fato:

$$\frac{a^m}{a^{p+1}} = \frac{a^m}{a^p \cdot a} = \frac{\left(\frac{a^m}{a^p}\right)}{a} = \frac{a^{m-p}}{a} = a^{(m-p)-1} = a^{m-(p+1)}$$

Portanto, pelo PIF, segue que a propriedade é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $m \in \mathbb{N}$ .

■

**Definição 2.5 (Raiz enésima aritmética):** Dados  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a \geq 0$ , e  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq 1$ , será chamado de raiz enésima aritmética de  $a$ , representado por  $\sqrt[n]{a}$ , o número  $b \in \mathbb{R}_+$ , tal que  $b^n = a$ . Simbolicamente:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

Dessa definição, observa-se que:

$$(1) (\sqrt[n]{a})^n = a, \text{ para todo } a \geq 0;$$

$$(2) \sqrt{a^2} = |a|.$$

**Proposição 2.6:** Se  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $b \in \mathbb{R}_+$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ , então as seguintes propriedades são válidas:

$$(1) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}, \text{ para } a \neq 0 \text{ ou } m \neq 0;$$

$$(2) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$(3) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ para } b \neq 0;$$

$$(4) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \text{ para } a \neq 0 \text{ ou } m \neq 0;$$

$$(5) \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}.$$

**Demonstração:** Da Definição 2.5 e da Proposição 2.2, segue-se que:

(1) Considere  $x = \sqrt[n]{a^m}$ , então:

$$x^{n \cdot p} = (\sqrt[n]{a^m})^{n \cdot p} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = [a^m]^p \Leftrightarrow x = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Portanto,  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ .

(2) Tomando  $y = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ , segue-se que:

$$y^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b \Leftrightarrow y = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Portanto,  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ .

(3) Fazendo  $x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ , então:

$$x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Portanto,  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ .

(4) Para essa propriedade, tomando  $m \geq 0$ , aplicando o PIF sobre  $m$  e considerando  $n$  fixo, segue-se que a propriedade é válida para  $m = 0$ , pois  $(\sqrt[n]{a})^0 = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^0}$ .

Supondo que a propriedade seja válida para  $m = p$ , ou seja,  $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$  (hipótese de indução), é possível mostrar que também será verdadeira para  $m = p + 1$ .

De fato:

$$(\sqrt[n]{a})^{p+1} = (\sqrt[n]{a})^p \cdot \sqrt[n]{a}$$

Pela hipótese de indução, segue-se que:

$$(\sqrt[n]{a})^{p+1} = \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^p \cdot a} = \sqrt[n]{a^{p+1}}$$

Assim, para  $m \geq 0$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ , pelo PIF, segue que a propriedade é válida.

Por outro lado, se  $m < 0$ , tomando  $-m = q > 0$ , então:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^q} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^q}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(5) Tomando  $x = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}$ , então:

$$x^p = \left( \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} \right)^p = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow (x^p)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

Portanto,  $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$ .

■

**Definição 2.7 (Potência de expoente racional):** Dados  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , define-se a potência de base  $a$  e expoente  $\frac{p}{q}$  por  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ .

Se  $a = 0$  e  $\frac{p}{q} > 0$ , adota-se a definição especial  $0^{\frac{p}{q}} = 0$ .

Decorrem dessa definição as seguintes observações:

- (1) O símbolo  $0^{\frac{p}{q}}$ , quando  $\frac{p}{q} < 0$ , não tem significado, pois  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  e  $q \in \mathbb{N}^*$ , logo  $p < 0$  e  $0^p$  não está definido;
- (2) Toda potência de base positiva e expoente racional é um número real positivo.

**Proposição 2.8:** Considerando  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  e  $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ , são válidas as seguintes propriedades:

- (1)  $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$ ;
- (2)  $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$ ;
- (3)  $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$ ;
- (4)  $\left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$ ;
- (5)  $\left( a^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p \cdot r}{q \cdot s}}$ .

**Demonstração:** Da Definição 2.7 e das Proposições 2.2 e 2.4, segue-se que:

(1) De fato:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s}} \cdot \sqrt[s \cdot q]{a^{r \cdot q}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s} \cdot a^{r \cdot q}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s + q \cdot r}} = a^{\frac{p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

Portanto,  $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$ .

(2) Basta tomar  $\frac{g}{h} \in \mathbb{Q}$  de tal forma que  $\frac{g}{h} = -\frac{r}{s}$ , assim segue-se que:

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{-\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{g}{h}}$$

Por (1), tem-se que  $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{g}{h}} = a^{\frac{p+g}{q+h}} = a^{\frac{p-r}{q-s}}$ . Portanto,  $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p-r}{q-s}}$ .

(3) De fato:

$$(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$$

Portanto,  $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$ .

(4) Como  $\left(\frac{a}{b}\right) = a \cdot b^{-1}$ , segue-se que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b^{-1})^{\frac{p}{q}}$$

Por (3), se tem que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b^{-1})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot (b^{-1})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{p}{q}}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$$

Portanto,  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$ .

(5) De fato:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{p \cdot r}}} = \sqrt[s \cdot q]{a^{p \cdot r}} = \sqrt[s \cdot q]{a^{p \cdot r}} = a^{\frac{p \cdot r}{q \cdot s}}$$

$$\text{Portanto, } \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p \cdot r}{q \cdot s}}.$$

■

**Definição 2.9 (Potência de expoente irracional):** Dados  $a \in \mathbb{R}$  e um número irracional  $\alpha$ , considere os conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} / r < \alpha\}, A_2 = \{s \in \mathbb{Q} / s > \alpha\}.$$

Note que, tomando um número qualquer de  $A_1$ , este será menor que qualquer número de  $A_2$ .

Existem dois números  $r$  e  $s$ , tais que  $r < \alpha < s$  de tal forma que a diferença  $s - r$  será menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Considere os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r / r \in A_1\}, B_2 = \{a^s / s \in A_2\}$$

em correspondência aos conjuntos  $A_1$  e  $A_2$ .

Desta maneira, se  $a > 1$ , todo número de  $B_1$  será menor que qualquer número de  $B_2$ .

Existem dois números  $a^r \in B_1$  e  $a^s \in B_2$  de tal forma que a diferença  $a^s - a^r$  será menor que qualquer número positivo e arbitrário.

De acordo com essas condições, tem-se que  $a^r$  e  $a^s$  são consideradas aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de  $a^\alpha$ , e que  $B_1$  e  $B_2$  são classes que definem  $a^\alpha$ .

Agora, se  $0 < \alpha < 1$ , a demonstração ocorre de forma análoga.

As potências de expoentes reais serão desenvolvidas na próxima seção, seguindo a definição de função exponencial.



## 2.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

**Definição 2.10:** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , não vazios, uma relação  $f$  de  $A$  em  $B$  recebe o nome de função definida em  $A$  com imagens em  $B$  se, e somente se, para todo  $x \in A$ , existe um só  $y \in B$ , tal que  $(x, y) \in f$ .

É importante ressaltar que, em geral, os conjuntos  $A$  e  $B$  apresentados na definição de função são subconjuntos do conjunto dos números reais e podem-se relacionar com uma sentença aberta,  $y = f(x)$ . Essa sentença expressa de forma analítica uma lei de correspondência na qual, dado um elemento  $x \in A$ , determina-se o elemento  $y \in B$  de tal forma que  $(x, y) \in f$ .

É comum fazer uso da notação  $f: A \rightarrow B$  tal que  $y = f(x)$  para representar uma função de acordo com sua lei de correspondência  $y = f(x)$ . Diz-se que o conjunto  $A$  é chamado de Domínio de  $f$ , indicado por  $D_f$ .

**Definição 2.11 (Função Exponencial):** Seja  $a \in \mathbb{R}$ , de tal forma que  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , chama-se de função exponencial de base  $a$  a função dada por:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = a^x$ .

Da Definição 2.11, são válidas as seguintes propriedades:

- (1)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $a^1 = a$ .

**Proposição 2.12:** Dada  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = a^x$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , então são verdadeiras as seguintes afirmações:

- (1)  $f(x) \neq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $f(x) > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:**

(1) Pela propriedade  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ , decorrente da definição 2.14, segue-se que  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ .

Suponha que  $f(x)$  possa ser nula. Nesse caso, deve existir algum  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_0) = 0$ . Com algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0.$$

Nesse caso,  $f(x)$  deveria ser identicamente nula, o que é um absurdo, visto que  $f(x) = a^x$  e  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Portanto,  $f(x) \neq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(2) Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , segue-se que:

$$f(x) = f\left(\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2.$$

Por (1), sabe-se que  $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , logo  $f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$ .

■

**Lema 2.13:** Seja  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$ , e  $n \in \mathbb{Z}$ , então  $a^n > 1$  se, e somente se,  $n > 0$ .

**Demonstração:** Esta demonstração será feita em duas partes.

*Parte 1:* Dados  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , se  $n > 0$ , então  $a^n > 1$ .

Usando o PIF sobre  $n$ , segue-se que a proposição é verdadeira para  $n = 1$ , pois  $a^1 = a > 1$ .

Considere que a proposição seja verdadeira para  $n = p$ , em outras palavras,  $a^p > 1$  (hipótese de indução), é possível provar que  $a^{p+1} > 1$ .

De fato, como  $a^1 > 1$ , multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por  $a^p$ , pela Proposição 2.12 (2), segue-se que:

$$a > 1 \Rightarrow a \cdot a^p > a^p \Rightarrow a^{p+1} > a^p > 1$$

Assim, pelo PIF, segue-se que, se  $n > 0$ , então  $a^n > 1$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , sendo  $n > 0$ .

*Parte 2:* Dado  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , se  $a^n > 1$ , então  $n > 0$ .

Suponha que  $n \leq 0$ , segue-se que  $-n \geq 0$ .

Note que  $n = 0 \Rightarrow a^0 = 1$  e, pela parte 1,  $-n > 0 \Rightarrow a^{-n} > 1$ , logo:

$$-n \geq 0 \Rightarrow a^{-n} \geq 1$$

Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por  $a^n$ , pela Proposição 2.12 (2), segue-se que:

$$a^{-n} \geq 1 \Rightarrow a^n \cdot a^{-n} \geq a^n \Rightarrow 1 \geq a^n.$$

O que é um absurdo, pois contraria a hipótese  $a^n > 1$ . Portanto,  $n > 0$ .

■

**Lema 2.14:** Seja  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$  e  $r \in \mathbb{Q}$ , então  $a^r > 1$  se, e somente se,  $r > 0$ .

**Demonstração:** Esta demonstração será feita em duas partes.

*Parte 1:* Dados  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$  e  $r \in \mathbb{Q}$ , se  $r > 0$ , então  $a^r > 1$ .

De fato, tomando  $r = \frac{p}{q}$ , com  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , segue-se que  $a^r = a^{\frac{p}{q}}$ .

Pelo Lema 2.13, se  $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q > 1$  e  $q > 0$ , então  $a^{\frac{1}{q}} > 1$ . Pelo mesmo lema, se  $a^{\frac{1}{q}} > 1$  e  $p > 0$ , então  $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1$ , ou seja,  $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r > 1$ .

*Parte 2:* Dados  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$  e  $r \in \mathbb{Q}$ , se  $a^r > 1$ , então  $r > 0$ .

De fato, seja  $r = \frac{p}{q}$ , com  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{Z}^*$ , então  $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ .

Supondo  $q > 0$  e, pela parte 1  $a^{\frac{1}{q}} > 1$ , segue-se, pelo Lema 2.17, que:

$$a^{\frac{1}{q}} > 1 \text{ e } \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1 \Rightarrow p > 0.$$

Logo,

$$q > 0 \text{ e } p > 0 \Rightarrow r = \frac{p}{q} > 0.$$

Agora, supondo que  $q < 0$ , tem-se que  $-q > 0$  e, pelo Lema 2.13, segue-se que:

$$a^{\frac{1}{q}} > 1 \text{ e } \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{-p} > 1 \Rightarrow -p > 0 \Rightarrow p < 0.$$

Portanto,  $q < 0$  e  $p < 0 \Rightarrow r = \frac{p}{q} > 0$ .

■

**Lema 2.15:** Sejam  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$ ,  $r$  e  $s$  racionais, segue-se que  $a^s > a^r$  se, e somente se,  $s > r$ .

**Demonstração:** Esta demonstração será feita em duas partes.

*Parte 1:* Sejam  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$ ,  $r$  e  $s$  racionais, se  $a^s > a^r$ , então  $s > r$ .

De fato,

$$a^s > a^r \Rightarrow a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \Rightarrow a^{s-r} > 1$$

Pelo Lema 2.14, segue-se que:

$$a^{s-r} > 1 \Rightarrow s - r > 0 \Rightarrow s > r.$$

*Parte 2:* Sejam  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$ ,  $r$  e  $s$  racionais, se  $s > r$ , então  $a^s > a^r$ .

De fato,

$$s > r \Rightarrow s - r > 0$$

Pelo Lema 2.14, segue-se que:

$$a^{s-r} > 1 \Rightarrow a^s \cdot a^{-r} > 1 \Rightarrow a^s \cdot \frac{1}{a^r} > 1 \Rightarrow a^s > a^r.$$

■

**Lema 2.16:** Sejam  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$  e  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , segue-se que  $a^\alpha > 1$  se, e somente se,  $\alpha > 0$ .

**Demonstração:** Considere os conjuntos que definem o número irracional  $\alpha$ :

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} / r < \alpha\}, A_2 = \{s \in \mathbb{Q} / s > \alpha\}.$$

E, em correspondência aos conjuntos  $A_1$  e  $A_2$ , considere os conjuntos de potências de expoentes racionais que definem  $a^\alpha$ :

$$B_1 = \{a^r / r \in A_1\}, B_2 = \{a^s / s \in A_2\}.$$

A partir dessas considerações, a demonstração será feita em duas partes:

*Parte 1:* Sejam  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$  e  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , se  $\alpha > 0$ , então  $a^\alpha > 1$ .

De fato, como  $\alpha > 0$ , existem  $r \in A_1$  e  $s \in A_2$ , tais que  $0 < r < \alpha < s$ .

Pelo Lema 2.14, como  $a > 1$ ,  $r > 0$  e  $s > 0$ , segue-se que  $a^r > 1$  e  $a^s > 1$ .

Pelo Lema 2.15, como  $a > 1$  e  $r < s$ , segue-se que  $1 < a^r < a^s$  e, pela Definição 2.9, vem:

$$1 < a^r < a^\alpha < a^s$$

ou seja,

$$a^\alpha > 1.$$

*Parte 2:* Sejam  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$  e  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , se  $a^\alpha > 1$ , então  $\alpha > 0$ .

Suponha  $\alpha < 0$ , ou seja,  $-\alpha > 0$ . Assim, segue da parte 1 que:

$$a > 1, -\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \text{ com } -\alpha > 0 \Rightarrow a^{-\alpha} > 1.$$

Então, ao multiplicar ambos os membros dessa última desigualdade, por  $a^\alpha > 0$ , vem:

$$a^{-\alpha} \cdot a^\alpha > a^\alpha$$

isto é,

$$1 > a^\alpha$$

o que contraria a hipótese, logo  $\alpha > 0$ .

■

**Teorema 2.17:** Sejam  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , segue-se que  $a^b > 1$  se, e somente se,  $b > 0$ .

**Demonstração:** Inicialmente, considerando  $b \in \mathbb{Q}$ , pelo Lema 2.14, segue-se que  $a^b > 1$  se, e somente se,  $b > 0$ . Por outro lado, se  $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , pelo Lema 2.16, segue-se que  $a^b > 1$  se, e somente se,  $b > 0$ . Portanto, para  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$ , tem-se  $a^b > 1$  se, e somente se,  $b > 0$ . ■

**Teorema 2.18:** Se  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 1$ , sejam  $x_1 \in \mathbb{R}$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $a^{x_1} > a^{x_2}$  se, e somente se,  $x_1 > x_2$ .

**Demonstração:** Como  $a > 1$ , segue-se que:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1$$

Pelo Teorema 2.17, vem que:

$$x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2. \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.19:** Sejam  $a \in \mathbb{R}$ , com  $0 < a < 1$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , segue-se que  $a^b > 1$  se, e somente se,  $b < 0$ .

**Demonstração:** Se  $0 < a < 1$ , então:

$$a < 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 1.$$

Tomando  $c = \frac{1}{a} > 1$ , pelo Teorema 2.17, vem que  $c^{-b} > 1 \Leftrightarrow -b > 0$

Substituindo  $c$  por  $\frac{1}{a}$ , segue-se que:

$$c^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b} = a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0. \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.20** Sejam  $a \in \mathbb{R}$ , com  $0 < a < 1$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $a^{x_1} > a^{x_2}$  se, e somente se,  $x_1 < x_2$ .

**Demonstração:** Como  $0 < a < 1$ , segue-se que:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1$$

Pelo Teorema 2.17, vem que:

$$a^{x_1 - x_2} > 1 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

■

**Teorema 2.21:** Dada  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = a^x$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , então são verdadeiras as seguintes propriedades:

- (1)  $a > 1$  se, e somente se,  $f(x) = a^x$  é crescente;
- (2)  $0 < a < 1$  se, e somente se,  $f(x) = a^x$  é decrescente.

**Demonstração:**

- (1) Considere  $x, y \in \mathbb{R}$  tais que  $x < y$ , logo  $y - x > 0$ . Do Teorema 2.18, segue-se que  $a^{y-x} > 1$ . Assim,

$$a^{y-x} > 1 \Leftrightarrow a^y \cdot a^{-x} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^y}{a^x} > 1 \Leftrightarrow a^y > a^x \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Portanto,  $f(x) = a^x$  é uma função crescente.

- (2) Considere  $x, y \in \mathbb{R}$  de tais que  $x < y$ , então  $x - y < 0$ . Do Teorema 2.20, segue-se que  $a^{x-y} > 1$ . Então:

$$a^{x-y} > 1 \Leftrightarrow a^x \cdot a^{-y} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^y} > 1 \Leftrightarrow a^x > a^y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$$

Portanto,  $f(x) = a^x$  é uma função decrescente.

■

**Corolário 2.22:** A função exponencial  $f(x) = a^x$  com  $0 < a \neq 1$  é uma função injetora.

**Demonstração:** De fato, dados  $x_1$  e  $x_2$ , números reais tais que  $x_1 \neq x_2$ , sem perda de generalidade, suponha  $x_1 < x_2$ . Dessa forma, segue-se que, se  $a > 1$ , então  $f(x_1) < f(x_2)$ , e se  $0 < a < 1$ , então  $f(x_1) > f(x_2)$ . Em ambos os casos, tem-se  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

## 2.3 GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

**Definição 2.23:** Dada uma função  $f: A \rightarrow B$  tal que  $y = f(x)$ , o gráfico de  $f$  é definido por  $Gr(f) = \{(x, y) \in A \times B / y = f(x)\}$ .

Em outras palavras,  $Gr(f)$  é um subconjunto de  $A \times B$ .

Seja a função  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $y = f(x)$ , sendo  $I$  um intervalo não degenerado. De acordo com Guidorizzi (2001), alguns passos podem ser seguidos para esboçar o gráfico de uma função, os quais são:

**Passo 1:** Explicitar o domínio da função, ou seja, explicitar o conjunto  $D_f$ .

Neste caso, a partir da expressão analítica de  $f(x)$ , verifica-se qual o maior subconjunto de  $\mathbb{R}$  para o qual  $f(x)$  exista e  $f(x) \in \mathbb{R}$ .

**Passo 2:** Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

Para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função  $f$ , pode-se aplicar o Teste da Derivada Primeira, o qual indica que uma função  $f$ , contínua e diferenciável, é crescente se sua derivada de primeira ordem,  $f'$ , é positiva e decrescente se a derivada  $f'$  é negativa.

**Passo 3:** Estudar a concavidade e identificar os pontos de inflexão, caso existam.

Para determinar a concavidade de uma função  $f$ , pode-se aplicar o Teste da Derivada Segunda, o qual indica que uma função  $f$ , de classe  $C^2$ , tem concavidade para cima se sua derivada de segunda ordem,  $f''$ , é positiva, e concavidade para



baixo se a derivada  $f''$  é negativa. O ponto no qual o gráfico de  $f$  muda de concavidade é chamado ponto de inflexão.

**Passo 4:** Determinar as assíntotas verticais, caso existam.

A existência de assíntotas verticais está relacionada ao comportamento da função, próximo a um ponto de descontinuidade dessa função. Assim, para verificar a existência dessas assíntotas, basta calcular os limites laterais de  $f$ , em  $p$  nos casos em que  $p \notin D_f$ , mas  $p$  sendo um dos extremos de um dos intervalos que compõe  $D_f$  ou ainda  $p \in D_f$ , a função  $f$  não seja contínua em  $p$ .

**Passo 5:** Determinar as assíntotas horizontais, casos existam.

Quando se fala na existência de assíntotas horizontais para uma função, ao se calcular o seu limite  $x \rightarrow +\infty$  e/ou  $x \rightarrow -\infty$ , tem-se que esse limite tende a um valor  $k$  constante. Esse conceito está associado às definições de função limitada ou limitada superiormente ou inferiormente.

**Passo 6:** Determinar as raízes, caso existam.

Para se determinar as raízes de uma função, deve-se resolver a equação  $f(x) = 0$ .

Dessa forma, seguindo os passos apresentados para a função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $y = f(x) = a^x$ , quando  $a \neq 1$ , obtém-se:

$$(1) D_f = \mathbb{R};$$

(2) Como  $f'(x) = a^x \ln(a)$ , segue-se que, se  $a > 1$ , então  $\ln(a) > 0$ , logo  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e, conseqüentemente,  $f$  é crescente. Por outro lado, se  $0 < a < 1$ , então  $\ln(a) < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , de modo que  $f$  é decrescente.

Esse fato permite a simplificação da análise sobre o crescimento e o decrescimento de uma função exponencial ser determinada simplesmente pela análise do valor de  $a$ , ou seja, se  $a > 1$ , a função exponencial será crescente e, se  $0 < a < 1$ , será decrescente.

(3) Como  $f''(x) = a^x \ln^2(a)$ , segue-se que  $f''(x) > 0$  para todo  $a \neq 1$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ , logo a concavidade do gráfico de  $f$  será para cima.

(4) Como a função é contínua em todo seu domínio, não existem assíntotas verticais.

(5) Para o caso das assíntotas horizontais, considere  $f(x) = a^x$  com  $a > 1$ . Nesse caso, segue-se que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Por outro lado, considerando  $0 < a < 1$ , segue-se que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

e:

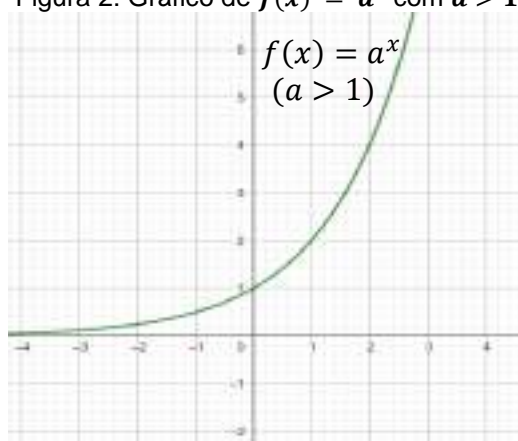
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Portanto, em ambos os casos, a reta  $y = 0$  será uma assíntota horizontal.

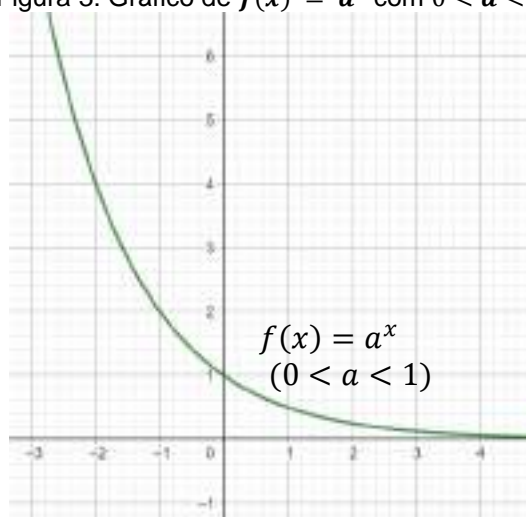
(6) Para  $f(x) = a^x$ , não existem raízes reais, pois, pela Proposição 2.12,  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Além das características descritas anteriormente, pode-se destacar o fato que o gráfico de  $f$  intersecta o eixo das ordenadas no ponto  $(0,1)$ , pois  $f(0) = a^0 = 1$ .

O gráfico da função  $f(x) = a^x$  pode ser visto nas Figuras 2 e 3, que apresentam o comportamento crescente e decrescente, respectivamente, da função exponencial.

Figura 2: Gráfico de  $f(x) = a^x$  com  $a > 1$ 

Fonte: Próprio autor.

Figura 3: Gráfico de  $f(x) = a^x$  com  $0 < a < 1$ 

Fonte: Próprio autor.



### 3 ATIVIDADE PROPOSTA

A proposta das atividades descritas a seguir é voltada para alunos do primeiro ano do Ensino Médio e inicia-se com a formação dos grupos. Essa formação deverá privilegiar uma grande diversidade de vivências e habilidades, buscando heterogeneidade que, por sua vez, se faz necessária para que os alunos possam desenvolver, além do conteúdo, valores de interdependência positiva.

Sugere-se que seja fornecida a cada grupo uma pasta do tipo catálogo ou similar, na qual os alunos poderão organizar todo o conteúdo produzido/trabalhado ao longo das atividades, tornando-a uma importante fonte de consulta sempre que necessário, tanto para consultar as atividades já realizadas quanto para o acompanhamento e avaliação do professor. Durante a avaliação, o professor deverá apontar correções e indicar sugestões de pesquisa para que o grupo possa ampliar e melhorar aquilo que tenha desenvolvido.

Cada sequência de aulas previstas para a realização das atividades propostas será denominada Encontro, e será o momento no qual os alunos deverão realizar as atividades sugeridas por meio de fichas de atividades. Essas fichas servirão como um roteiro para que os alunos/grupos possam desenvolver os conceitos esperados. Caberá ao professor direcionar essas atividades de tal modo que sejam estabelecidas relações de cooperação e colaboração, o que corroborará com a preservação da essência pedagógica da proposta. Nesse direcionamento, o professor deverá observar como ocorre a dinâmica dentro dos grupos, realizando intervenções sempre que necessário, além de permanecer atento ao tempo e realizar a condução de forma que todos consigam cumprir as atividades propostas para cada Encontro.

A seguir, são descritas as atividades. Serão apresentadas sugestões de como dever ocorrer o desenvolvimento pelos grupos/alunos, também o que se espera da produção ao final de cada Encontro e ainda orientações ao professor.

**Encontro 1:** O que aconteceu com meu dinheiro?

**Duração:** 2 horas-aula.

**Local:** Sala de aula.

**Material necessário:** Ficha de atividades, lápis, caneta e borracha.

**Multidisciplinaridade:** Geografia, História e Sociologia.

**Descrição da Atividade:** Nesta atividade, espera-se dos alunos uma discussão sobre a inflação e seus impactos na sociedade. Propõe-se que seja realizada a análise dos infográficos a seguir e, com isso, a apresentação dos conhecimentos prévios que cada integrante do grupo tem sobre a inflação e desvalorização monetária. Serão apresentadas questões para auxiliar a discussão e a elaboração de hipóteses.

Quadro 2: Ficha de Atividades 1

**Ficha de Atividades 1: O que aconteceu com meu dinheiro?**

Figura 4: Valor equivalente a R\$ 100,00 em 1994 e 2019



Fonte: CAMARGO, Sofia. Depois de quase 25 anos do Plano Real, nota de 100 reais só vale R\$ 16,75. **R7**, 26 fev. 2019. Disponível em: <https://noticias.r7.com/prisma/o-que-e-que-eu-faco-sophia/depois-de-quase-25-anos-do-plano-real-nota-de-r-100-so-vale-r-1675-26022019>. Acesso em: 23 mar. 2020.

Responda as questões a seguir.

**Questão 1:** Quais os fatores que se relacionam à perda de valor, ou seja, perda do poder de compra do dinheiro?

- Questão 2:** O que podemos estimar sobre os impactos na vida social das pessoas devido à perda de valor da moeda de um país?
- Questão 3:** Quais reflexos você apontaria sobre os impactos dessa perda de valor na sua vida?
- Questão 4:** Elabore hipóteses sobre como ocorre a perda do poder de compra?

Fonte: Próprio autor.

### **Respostas esperadas:**

**Questão 1:** Espera-se que sejam apontados fatores relacionados à perda de poder de compra do dinheiro que remetam ao processo inflacionário, por exemplo, o trabalhador que percebe que, ao comprar os mesmos produtos na compra de um mês para outro, nota que precisa desembolsar um valor maior do que do mês anterior, ou ainda a percepção que as pessoas têm de que, em outros tempos, se comprava muito mais com uma determinada quantia de dinheiro.

**Questão 2:** Espera-se como resposta quais as consequências para a população como um dos resultados de um processo inflacionário, por exemplo, as famílias que reduzem o consumo de certos alimentos para que possam comprar os alimentos básicos. Também pode-se citar as pessoas que passam a ter dificuldade em ir ao trabalho após o aumento na tarifa do ônibus.

**Questão 3:** Espera-se que os alunos possam relacionar alguns fatos em sua vida com o processo inflacionário. Aqui, abre-se espaço para que os alunos possam fazer relatos sobre suas experiências.

**Questão 4:** Neste momento da atividade, os alunos deverão elaborar as hipóteses sobre a inflação e/ou seus efeitos na vida da população. Essas hipóteses devem ser ponto de partida no trabalho que será desenvolvido ao longo das atividades e que posteriormente poderão ser validadas ou não, de acordo com o desenvolvimento das atividades propostas.

Recomenda-se de 25 a 30 minutos para que os alunos discutam sobre o tema e respondam as questões, inclusive com o preenchimento da ficha de atividades. Outra recomendação para o professor refere-se a reservar de 10 a 15 minutos para que cada grupo possa apresentar suas hipóteses aos demais grupos. Esta parte da atividade visa permitir uma reavaliação das hipóteses elaboradas na etapa anterior.

**Encontro 2:** Como entender esta tal inflação?

**Duração:** 2 horas-aula.

**Local:** Sala de aula.

**Material Necessário:** Ficha de atividades, lápis, caneta e borracha.

**Multidisciplinaridade:** Geografia, História e Sociologia.

**Descrição da Atividade:** Este Encontro será desenvolvido aplicando o método sala de aula em quebra-cabeças proposto por Aronson *et al.* (1978). De acordo com Aronson e Patnoe (2011), tal método pode ser caracterizado por um conjunto de procedimentos e estratégias que buscam o desenvolvimento de competências cognitivas. Ele é dividido em três fases. Na primeira fase, os alunos são distribuídos em grupos que podem ser chamados de grupo de base, no qual um determinado tópico ou tema é analisado por cada integrante. Em geral, um tópico ou tema a ser estudado é subdividido em número de partes (ou subtópicos) de acordo com o número de membros de cada grupo. Essas partes devem se conectar para formar o todo, fazendo alusão a um quebra-cabeça. Na segunda fase, cada aluno estuda e discute com os membros dos outros grupos a quem foi distribuído o mesmo subtópico, formando assim um novo grupo chamado grupo de especialistas. Na terceira fase, cada aluno retorna ao seu grupo de base, no qual apresenta aos seus colegas suas conclusões e o que aprendeu sobre seu subtópico, de maneira que fiquem reunidos os conhecimentos indispensáveis para a compreensão do tópico em questão. Cada estudante precisa aprender o conteúdo para si próprio e explicar de forma clara o que aprendeu. Veja na Figura 5 um esquema de como organizar uma atividade baseada no método sala de aula em quebra-cabeças.

Considerando uma divisão de grupos com cinco estudantes cada, na primeira fase, cada aluno do grupo receberá um texto dentre os cinco textos apresentados a seguir. Nesta fase, cada estudante deverá realizar a leitura individual e ainda fazer anotações sobre sua interpretação pessoal acerca do texto que recebeu. Cada texto aborda um aspecto sobre inflação, de modo que, nesta parte da atividade, busca-se apresentar diversas informações sobre este tema.



Figura 5: Representação esquemática de uma atividade baseada no método cooperativo de aprendizagem para sala de aula em quebra-cabeças



Fonte: Adaptado de Fatareli (2010).

Quadro 3: Texto 1 para desenvolvimento da atividade no formato sala de aula em quebra-cabeças

**Texto 1: O drama da vida com inflação**

Durante um longo período da década de 80 e o início dos anos 90, a população sofria com uma inflação exorbitante. Eram comuns as remarcações diárias de preços nos supermercados e, embora seja de se espantar, com frequência elas ocorriam várias vezes ao dia. A população costumava estocar mercadorias em suas casas como forma de se prevenir do que fora chamado de Dragão da Inflação.

Não é de se surpreender que os mais velhos se lembrem dessa época sem saudades. Ao se fazer uma busca de preços dessa época, você certamente se espantaria com o valor que custava um carro popular e que, com esse mesmo valor, hoje, certamente você não compraria algo equivalente a um carro.

Quando se usa o termo inflação, o que se quer dizer é a relação da alta de preços que um determinado produto, ou conjunto de produtos, sofre com o passar do tempo. Embora seja bem incomum de se ouvir em nosso país, existe também um termo para quando os preços diminuem: deflação.

O aumento dos preços, quando há inflação, gera diversos problemas à vida das pessoas, uma vez que o poder de compra diminui e, com isso, as pessoas mais pobres acabam enfrentando muitas vezes a fome.

Normalmente associado ao conceito de oferta e procura, o aumento de preços ocorre quando a oferta de determinado produto diminui e/ou a procura aumenta. Outra forma de se observar o aumento de preços é quando os consumidores estão dispostos a pagar mais por um produto. Mas podemos citar diversos fatores que poderiam contribuir para a inflação, como a diminuição da produção agrícola, o aumento de impostos sobre determinado produto, a atualização tecnológica, entre outros.

Pelo nosso mercado ser globalizado, é fato que as relações cambiais entre a moeda do país e uma moeda estrangeira refletem também no cálculo da inflação, já que cada vez mais é comum o consumo de produtos importados. E aqueles que têm como um de seus destinos à exportação têm seus valores atrelados às variações cambiais.

Uma preocupação das políticas públicas é manter a inflação controlada, embora essa função demande certa organização e critérios definidos em lei. Por exemplo, se o governo gasta mais do que arrecada, ele não pode mandar imprimir mais dinheiro para cobrir os gastos, pois, se isso fosse feito, com certeza haveria uma pressão para que os preços dos produtos e serviços se elevassem, já que haveria mais dinheiro circulando na economia do que as riquezas produzidas de fato. Aumentar os impostos seria uma alternativa, mas isso também seria repassado aos consumidores e conseqüentemente haveria aumento nos preços.

Além das situações descritas, ainda temos as seguintes conseqüências com uma inflação alta na economia de um país: perda do poder de compra, redução dos investimentos dos empresários, diminuição do consumo, aumento da pobreza e até paralisação de projetos e diminuição dos empregos.

Fonte: Próprio autor.

Quadro 4: Texto 2 para desenvolvimento da atividade no formato sala de aula em quebra-cabeças

**Texto 2: Aumento do custo de vida, a diferença da vida real para os índices oficiais**

Muitas vezes é anunciado nos telejornais que a inflação oficial do país está em 4,3% no acumulado do ano, mas, em outros momentos, é informado que, para as classes D e E, a inflação foi de 5,2% ou ainda que o reajuste dos planos de saúde será de 10%, correspondente à inflação do setor. Mas a inflação não é a mesma para todos? Por que temos essa diferença? E por que alguns sentem mais os efeitos da inflação do que outros?

Para entender um pouco sobre esse processo, precisamos analisar como ocorre a formação do índice da inflação.

Os índices que medem a inflação podem estar relacionados apenas a um grupo de produtos que nem sempre representa o consumo real de uma família. É comum termos índices que sofram variações de acordo com a região onde se pesquisa sobre o preço da cesta básica. Você também pode observar que o padrão de consumo varia de acordo com a faixa de renda varia, embora seja levado em consideração o mesmo grupo de produtos e serviços por cada faixa socioeconômica das famílias. Essa relação dos produtos se baseia em pesquisas que identificam o padrão de consumo das famílias e os estabelecimentos de venda de produtos e serviços para acompanhar a evolução dos preços.

Com frequência, é fácil explicar por que as famílias sentem a inflação de formas diferentes. Vejamos alguns exemplos.

A família de José tem renda mensal de 1,5 salário-mínimo e a maior parte dessa renda se destina à alimentação. Assim, se no grupo de produtos alimentícios houver uma alta significativa dos preços, essa família certamente terá uma sensação de que a alta dos preços foi maior que a anunciada como índice oficial da inflação.

Já a família de Pedro tem uma renda mensal de seis salários-mínimos e a proporção dessa renda destinada à alimentação é bem menor que a da família do José. Assim, a percepção do aumento dos preços será menor para ela.

Quando uma família tem um automóvel, sempre que ocorre aumento nos combustíveis, percebe que o custo mensal de seus gastos cresce, fato que não ocorre com famílias que não possuem esse mesmo bem.

Fonte: Próprio autor

Quadro 5: Texto 3 para desenvolvimento da atividade no formato sala de aula em quebra-cabeças

**Texto 3: Quais as diferenças entre os índices de inflação no Brasil**

Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC), Índice Geral de Preços de Mercado (IGP-M), entre outros, são índices que medem a variação de preços, mas há diferença no recorte de cada pesquisa. Porém, apesar de todos terem como princípio acompanhar a variação de preços, cada um deles tem um objetivo diferente.

Enquanto um serve para calcular a mudança de custo de vida dos idosos, por exemplo, outro pode ser destinado à medição do impacto da inflação para as famílias de baixa renda.

Os índices de inflação são calculados e divulgados por várias instituições, tais como o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (FIPE), a Fundação Getúlio Vargas (FGV) e o Instituto Brasileiro de Economia (IBRE).

Para adequar a pesquisa ao recorte desejado, cada índice usa critérios diferentes de monitoramento. Há diferenças, por exemplo, no grupo de produtos pesquisados e nos critérios escolhidos, que podem ser os hábitos de consumo das famílias, a sua idade e/ou faixa de renda.

Veja a seguir alguns dos principais índices que medem a inflação no Brasil.

O IPCA é calculado pelo IBGE e é considerado o índice oficial de inflação do país. O indicador serve de referência para o Banco Central decidir a taxa básica de juros conhecida por Sistema Especial de Liquidação de Custódia (SELIC) e para o governo avaliar se o índice está dentro da meta determinada pelo Conselho Monetária Nacional.

O IPCA mede os preços de produtos e serviços cobrados das famílias com rendimentos mensais de 1 a 40 salários-mínimos, moradoras das regiões metropolitanas de Belém, Fortaleza, Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo, Curitiba, Vitória e Porto Alegre, além dos municípios de Brasília, Goiânia e Campo Grande. Os mais de 400 itens pesquisados fazem parte dos grupos: alimentação e bebidas, habitação, artigos de residência, vestuário, transportes, saúde e cuidados pessoais, despesas pessoais, educação e comunicação.

O INPC é usado como referência para reajustes de salários e do salário-mínimo, pois calcula a inflação para famílias com renda mais baixa.

O IBGE mede a variação dos preços de produtos e serviços mais consumidos por famílias com rendimentos mensais de 1 a 5 salários-mínimos das regiões metropolitanas de Belém, Fortaleza, Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo, Curitiba e Porto Alegre, além dos municípios de Brasília e Goiânia. São mais de 400 itens pesquisados dentro dos mesmos grupos analisados no IPCA.

O IGP-M é calculado pelo IBRE/FGV e verifica os preços no atacado, para o produtor (60% de peso no índice), no varejo, para o consumidor (30%) e no setor de construção civil (10%).

Ele é conhecido como a “inflação do aluguel”, pois é utilizado para correção da maioria dos contratos de locação no país. Também é referência para a correção de preços do fornecimento de energia elétrica.

O Índice de Preços ao Consumidor da Terceira Idade (IPC-3i), calculado pelo IBRE/FGV, é conhecido como a “inflação da terceira idade”. Isso porque ele mede a variação de preços de bens e serviços mais consumidos por famílias compostas, majoritariamente, por pessoas com mais de 60 anos de idade.

Por esse motivo, o IPC-3i serve de referência para a execução de políticas públicas nas áreas de saúde e previdência. A pesquisa é feita nas cidades de São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Salvador, Recife, Porto Alegre e Brasília.

O Índice de Preços ao Consumidor Classe 1 (IPC-C1), calculado pelo IBRE/FGV, é conhecido como a “inflação da baixa renda”. Ele mede a variação de preços de uma cesta

de produtos e serviços para famílias com renda entre um e 2,5 salários-mínimos mensais nas cidades do Rio de Janeiro, São Paulo, Recife e Salvador.

Fonte: TREVISAN, Karina; CAVALLINI, Marta. Quais as diferenças entre os índices de inflação no Brasil?. **G1**, Economia, Educação Financeira, 02 jun. 2018. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/educacao-financeira/noticia/quais-as-diferencas-entre-os-indices-de-inflacao-no-brasil.ghtml>. Acesso em: 23 de mar. de 2020.

Quadro 6: Texto 4 para desenvolvimento da atividade no formato sala de aula em quebra-cabeças.

#### **Texto 4: Consequências da inflação alta**

A inflação alta ou fora de controle é prejudicial para a economia de um país, pois pode gerar diversos problemas e distorções econômicas. Taxas de inflação altas são aquelas que ficam acima de 6% ao ano.

Com a inflação elevada, a moeda vai perdendo seu valor com o passar do tempo e os consumidores (trabalhadores), que não têm reajustes salariais constantes, não conseguem comprar os mesmos produtos com o mesmo valor de antes. O preço dos produtos muda constantemente. Uma inflação de 50% ao mês (hiperinflação), por exemplo, corroi pela metade o salário dos trabalhadores.

Outro problema é que enquanto a moeda do país se desvaloriza, as outras (principalmente o dólar) faz o movimento inverso. Se o país com inflação elevada é muito dependente de importações, os produtos importados aumentam de preço, fato que alimenta ainda mais a alta da inflação.

Num ambiente de inflação elevada, muitos investidores preferem deixar o dinheiro aplicado em bancos (para que ocorra a correção monetária) do que investir no setor produtivo. Embora dê uma falsa ideia de que o dinheiro está “rendendo” muito, muitas pessoas preferem as aplicações financeiras.

Um país que sofre de inflação alta é visto no mercado internacional de forma negativa. Os grandes investidores e empresas evitam fazer investimentos produtivos de médios e longos prazos nesses países, pois sabem que a inflação alta é um indicativo de economia com problemas.

Muitos investidores externos, em busca de rendimentos altos e rápidos, costumam fazer investimentos em países de inflação alta com o objetivo de tirar vantagens das altas taxas de juros.

Esse capital especulativo é prejudicial para a economia de um país, pois grandes somas de capital podem entrar e sair rapidamente, causando instabilidade no mercado de câmbio.

Muitos países usam o recurso da elevação da taxa de juros como mecanismo de controlar a inflação. A lógica é simples: com juros elevados, o consumo diminui, forçando os preços a caírem. Porém, a alta dos juros desestimula a tomada de financiamentos, prejudicando assim os investimentos internos no setor produtivo, o mercado imobiliário e a venda de bens de consumo duráveis (veículos, eletrodomésticos etc.).

Países que não conseguem baixar e controlar a inflação sofrem no longo prazo, com o aumento das taxas de desemprego. Isso acontece, pois ocorre diminuição significativa nos investimentos no setor produtivo.

Em 2019, a inflação no Brasil foi de 4,31% (IPCA), ficando um pouco acima do centro da meta do Banco Central. Vale lembrar que a meta estipulada pelo governo brasileiro é de 4,25%, com margem de 1,5 ponto percentual para mais ou para menos. A inflação brasileira subiu muito nos últimos meses do ano em função da elevação dos preços dos combustíveis e da carne.

Fonte: SUAPESQUISA.COM. Consequências da inflação alta, 09 set. 2020. Disponível em: [suapesquisa.com/economia/consequencias\\_inflacao.htm](https://suapesquisa.com/economia/consequencias_inflacao.htm). Acesso em: 24 mar. 2020.

Quadro 7: Texto 5 para desenvolvimento da atividade no formato sala de aula em quebra-cabeças

**Texto 5: Os efeitos da inflação na Economia**

O processo inflacionário funciona como círculo vicioso que obriga um contínuo ajuste de salários e preços. Entenda melhor como a inflação impacta a sociedade.

A inflação é o processo em que ocorre um aumento generalizado dos preços de bens e serviços e consequentemente a desvalorização do dinheiro, ou seja, será necessário mais dinheiro para comprar um mesmo produto.

Se o preço de um item sobe rapidamente, ele provoca um efeito em cadeia. Quando o valor do petróleo sobe, aumenta também o custo dos produtos derivados desse material. Outro fator que revela o efeito da inflação é o consumo. O aumento repentino do consumo em detrimento da demanda ocasiona alta de preços, já que a escassez determina o valor do bem.

Há ainda a dívida do país. Se um governo gasta mais do que arrecada e emite mais papel-moeda para pagar suas contas, provoca um feito inflacionário, já que colocou no mercado um valor que não corresponde à produção. Quando os bens e serviços continuam os mesmos e o dinheiro em circulação aumenta, haverá mais consumo e, com isso, possível aumento de preços.

Os efeitos da inflação na economia ocorrem porque os preços (bens, serviços, salários, lucros etc.) não aumentam uniformemente. A inflação mexe nos preços relativos e, assim, retorna em ganhos para alguns e perdas para outros.

Quando a inflação é superior ao aumento de salários, por exemplo, há perda de poder de compra da população assalariada. O processo inflacionário acaba por obrigar um contínuo ajuste de salários e preços.

Para evitar que a inflação cause grandes distorções na economia do país, são aplicadas correções monetárias, que buscam neutralizar os aumentos.

Em cada setor da sociedade civil há um índice que mede a inflação periodicamente e, de tempos em tempos, os valores correspondentes a esses índices são usados para reajustar os valores monetários.

Assim, por exemplo, os salários são reajustados anualmente conforme a inflação média calculada pelos índices adotados pelo governo e as instituições privadas.

Fonte: MUNDO CARREIRA. Os efeitos da inflação na economia. 3 jul. 2014. Disponível em: [mundocarreira.com.br/mercado-de-trabalho/os-efeitos-da-inflacao-na-economia/](http://mundocarreira.com.br/mercado-de-trabalho/os-efeitos-da-inflacao-na-economia/). Acesso em: 24 mar. 2020.

Nessa etapa, é importante que os alunos realizem uma leitura com muita atenção e o professor deve orientar que registrem na ficha entregue junto com o texto suas impressões e observações durante a atividade e solicitar que se responda a seguinte questão: “Quais as conclusões que você chegou após a leitura do seu texto?”.

Aqui, espera-se que os alunos explicitem elementos sobre o processo inflacionário de acordo com o texto lido. O tempo para a etapa é de aproximadamente 10 minutos.

Na segunda fase, que ocorre a formação dos grupos de especialistas, o professor deverá solicitar aos alunos que se agrupem de acordo com a numeração do texto lido para realizarem uma discussão. Neste momento, cada grupo de trabalho terá um representante participando das discussões de cada texto. Um dos objetivos dessa fase é permitir que haja trocas de informações e conclusões entre os alunos que leram o mesmo texto. Para auxiliá-los, sugere-se que eles apresentem e discutam suas respostas para a questão levantada na etapa anterior, bem como respondam a próxima questão proposta: “Quais as conclusões que você havia elaborado acabaram sendo modificadas?”.

Neste instante, espera-se que os alunos ouçam os argumentos dos colegas, reflitam e possam acolher as observações dos colegas. A etapa não deverá tomar mais do que 15 minutos.

Na terceira fase, quando os alunos retornarem ao grupo de base, cada aluno deverá apresentar suas conclusões seguindo a ordem da numeração dos textos. Por exemplo, o aluno que leu o texto 1 deverá apresentar suas conclusões aos colegas que leram os textos 2, 3, 4 e 5, assim em diante. Pede-se que cada aluno não leve mais do que 3 minutos para apresentar suas conclusões. Ao final da etapa, o grupo deverá apresentar uma conclusão geral que aborde todos os aspectos levantados por cada integrante. Deve ser disponibilizado o tempo de aproximadamente 35 minutos.

Aos alunos, será destinada uma tarefa para o próximo Encontro: a elaboração de uma apresentação no formato digital para que cada grupo exponha aos demais suas conclusões sobre os textos lidos e discutidos.

O professor poderá sortear a ordem de apresentação dos grupos para que os alunos possam se preparar e ainda deverá orientá-los sobre a forma de arquivar na pasta de trabalho as fichas usadas na atividade. O tempo para a realização dessa terceira etapa é de, no máximo, 15 minutos.

**Encontro 3:** Vou explicar para entender!

**Duração:** 2 horas-aula.

**Local de Realização:** Sala de informática.

**Material Necessário:** Computador e projetor multimídia.

**Multidisciplinaridade:** Geografia, História e Sociologia.

**Descrição da Atividade:** Neste Encontro, serão realizadas as apresentações que os alunos prepararam a partir do Encontro 2. Recomenda-se que cada grupo utilize o tempo máximo de 15 minutos.

O professor deverá solicitar aos grupos que realizem suas apresentações, sempre propondo e permitindo questionamentos no sentido de ampliar a compreensão de todos sobre as conclusões acerca do tema e, caso necessário, ele poderá complementar os conceitos ao final das apresentações.

**Encontro 4:** Cálculo da Inflação e da perda do poder de compra.

**Duração:** 2 horas-aula.

**Local:** Sala de aula.

**Material necessário:** Fichas de atividades, lápis, caneta, borracha, calculadora.

**Multidisciplinaridade:** Não se aplica.

**Descrição da Atividade:** Este encontro será realizado utilizando a estratégia de rotação por estações, desta forma, o professor deverá organizar a sala de aula de forma tal forma que se tenha uma espécie de circuito. Deverá ainda indicar qual estação de trabalho inicial de cada grupo e também a forma como os alunos irão realizar a passagem pelas demais estações, garantindo que ao final do encontro todos os alunos tenham realizado todas as atividades propostas.

Em cada estação os alunos deverão analisar o material que foi apresentado, discutindo entre eles uma estratégia para resolver/responder o que se pede. Para facilitar a organização da sala de aula e o deslocamento dos alunos pelas estações será adotada uma numeração para as estações de trabalho.

Nesta atividade, o papel do professor será mais focado em incentivar o envolvimento de todos, buscando garantir que os alunos durante o processo realizem trocas de ideias e discussões antes e durante a realização das atividades em cada estação.

Quadro 8: Atividade 1 para ser desenvolvida por meio de estações de trabalho.

#### **Estação 1**

Um trabalhador recebia um salário de R\$ 1045,00 e não recebeu aumento ao final do ano de 2018, referente ao período de 1 de janeiro a 31 de dezembro de 2018. Sabendo que neste período a inflação foi de 3,66%, qual a diminuição do poder de compra desse trabalhador?

Considere que o trabalhador use  $x$  reais para comprar determinado produto em 1 de janeiro de 2018. Esse produto será denominado Produto A.

O Produto A tem seu valor atualizado pela inflação anual de 2018, assim para comprar o mesmo produto, em 1 de janeiro de 2019, esse trabalhador deverá desembolsar o valor de

$$x + \frac{3,66}{100}x = \frac{103,66x}{100}$$

Desta forma é possível concluir que o trabalhador somente conseguiria adquirir uma fração do Produto A, e esta fração é indicada por:

$$\frac{100x}{103,66x} \cong 0,965,$$

que equivale aproximadamente a 96,5%.

Assim, o valor equivalente ao salário desse trabalhador ao final do ano, sem reajuste salarial, seria o equivalente a 96,5% de R\$ 1045,00, ou seja, R\$ 1008,42.

#### **Exercícios propostos:**

**Exercício 1:** Suponha que você receba um salário de R\$ 1500,00 e que ficou sem aumento ao longo de um ano e que, nesse período, a inflação foi de 7%. Determine a perda do poder de compra e qual seria o salário equivalente.

**Exercício 2:** Suponha que você receba um salário de R\$ 1500,00 e que ficou sem aumento ao longo de dois anos, sendo que no primeiro ano a inflação foi de 5% e no segundo ano foi de 4%. Determine o percentual de perda do poder de compra nesse período e qual seria o salário equivalente.

Fonte: Próprio autor



**Resolução esperada para o Exercício 1:**

Considerando que o valor de um determinado produto seja  $x$ , desta forma, ao ter seu valor corrigido pela inflação, seu valor atualizado será

$$x + \frac{7}{100}x = \frac{107x}{100}.$$

Assim, com o valor  $x$  que ele adquiriria o produto no ano anterior, hoje ele só adquiriria uma fração desse valor, essa fração é dada por

$$\frac{100x}{107x} \cong 0,934,$$

que é equivalente a 93,4%.

Da mesma forma, isso ocorre com o salário deste trabalhador, que teria o valor de compra sendo apenas 93,4% de R\$ 1500,00, ou seja, R\$ 1500,00 · 93,4% = R\$1401,00. Portanto o salário equivalente será R\$ 1401,00.

Outra resolução esperada, na tentativa de facilitar os cálculos, é apresentada a seguir.

Considerando que o produto tenha um valor inicial de R\$ 100,00, desta forma, o produto custava R\$100,00 e por conta da inflação passou a ser R\$ 107,00. Desta maneira a perda do poder de compra é determinada por  $\frac{100}{107} \cong 0,934$ , equivalente a 93,4%. Assim, o poder de compra do salário é dado por R\$1500,00 · 93,4% = R\$ 1401,00, logo o salário equivalente será R\$ 1401,00.

**Resolução esperada para o Exercício 2:**

Um produto custava inicialmente o valor  $x$  e passou a custar no final do primeiro ano

$$x + \frac{5}{100}x = \frac{105x}{100}.$$

No final desse ano o poder de compra seria

$$\frac{100x}{105x} = 0,952$$

ou 95,2%.

O salário equivalente ao final do primeiro ano seria dado por:

$$\text{R\$ } 1500 \cdot 95,2\% = 1428,00 .$$

Agora, repete-se o processo para o segundo ano. Um produto custava no início do segundo ano o valor  $y$  e passou a custar no final do primeiro ano

$$y + \frac{4}{100}y = \frac{104y}{100} .$$

Ao final desse ano o poder de compra passaria a ser

$$\frac{100y}{104y} = 0,961$$

ou 96,1%.

O salário equivalente ao final desse período seria

$$\text{R\$ } 1428,00 \cdot 96,1\% = \text{R\$ } 1372,30 .$$

Quadro 9: Atividade 2 para ser desenvolvida como estação de trabalho.

### Estação 2

Suponha que um produto custava R\$ 430,00 em 10 de janeiro de 2018, neste ano a inflação média foi de 3,66%. Determine qual o valor desse mesmo produto em 10 de janeiro de 2019.

Primeiro, calcula-se o aumento do preço, ou seja, o valor referente a 3,66% de R\$430,00. Assim

$$\frac{3,66}{100} \cdot \text{R\$ } 430,00 \cong \text{R\$ } 15,74 .$$

Depois, realiza-se a soma de R\$15,74 com o valor R\$430,00, resultando em R\$445,74.

O valor final do produto será obtido por

$$\text{R\$ } 430,00 \cdot \left(1 + \frac{3,66}{100}\right) = \text{R\$ } 445,74 .$$

Após analisar o exemplo, os alunos deverão resolver os seguintes exercícios nessa estação.

**Exercícios propostos:**

**Exercício 1:** Considerando que em 1º de janeiro de 2018 o produto custava R\$ 430,00 e que no ano de 2017 a inflação foi de 6%, qual era o preço desse mesmo produto em 1º de janeiro de 2017?

**Exercício 2:** Certo aparelho do tipo *smartphone* custa hoje R\$ 1490,00, porém está programado nos próximos 2 meses aumentos sucessivos na ordem de 5% e de 9%, de acordo com aumento dos impostos sobre esse tipo de produto. Qual será o novo valor desse aparelho?

Fonte: Próprio autor.

**Resolução esperada para o Exercício 1:**

Seja  $p_0$  o preço do produto em 1º de janeiro de 2017, que ao ser corrigido pela inflação de 6%, teria seu valor atualizado calculado da seguinte forma:

$$\text{R\$ } 430,00 = p_0 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)$$

Assim,

$$\frac{\text{R\$ } 430,00}{\left(1 + \frac{6}{100}\right)} = p_0 \Leftrightarrow p_0 = \text{R\$ } 405,66$$

Logo, em 1º de janeiro de 2017 o produto custava R\$ 405,66.

**Resolução esperada para o Exercício 2:**

Primeiro calcula-se o valor após o aumento de 5%, assim o valor do *smartphone* será calculado do seguinte modo:

$$\text{R\$ } 1\,490,00 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = \text{R\$ } 1\,564,50.$$

Aplica-se agora o aumento de 9%, logo seu valor final será obtido assim:

$$\text{R\$ } 1\,564,50 \cdot \left(1 + \frac{9}{100}\right) = \text{R\$ } 1\,705,30.$$

Os alunos poderão apresentar ainda a seguinte forma de resolução:

$$\text{R\$ } 1490,00 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{9}{100}\right) = \text{R\$ } 1705,30.$$

Quadro 10: Atividade 3 para ser desenvolvida como estação de trabalho.

### Estação 3

Suponha que um produto custava R\$ 430,00 em 1º de janeiro de 2018, e em 1º de janeiro de 2019 esse mesmo produto custava R\$ 460,00. Determine qual a taxa de inflação desse período.

Seja  $t\%$  a taxa de inflação no período, assim segue que:

$$R\$ 460,00 = R\$ 430 \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{R\$ 460}{R\$ 430} \Leftrightarrow$$

$$\frac{t}{100} = 1,070 - 1 \Leftrightarrow \frac{t}{100} = 0,070 \Leftrightarrow t = 7\%.$$

**Exercício proposto:** Em um determinado país a cesta básica de produtos custava, em 1º de janeiro de 2014, R\$ 230,00. Sabendo que a inflação anual foi constante e que seu preço em 1º de janeiro de 2016 era de R\$ 278,30, determine a taxa anual de inflação.

Fonte: Próprio autor.

### Resolução esperada para o Exercício:

No período de 1º de janeiro de 2014 a 1º de janeiro de 2015, seja o preço final da cesta básica dado por  $p_1$ .

$$p_1 = 230,00 \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right) \quad (I)$$

Já para o período de 1º de janeiro de 2015 a 1º de janeiro de 2016, tem-se:

$$278,30 = p_1 \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right) \quad (II)$$

De (I) e (II) segue que:

$$R\$ 278,30 = R\$ 230,00 \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 = \frac{R\$ 278,30}{R\$ 230,00} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 = 1,21 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \pm 1,1 \Leftrightarrow \frac{t}{100} = 1,1 - 1 \Leftrightarrow t = 10\%.$$

Assim, conclui-se que a taxa de inflação foi de 10%.

Quadro 11: Atividade 4 para ser desenvolvida como estação de trabalho.

#### Estação 4

Um trabalhador ganha salário mínimo de R\$ 1045,00. Se a inflação ao longo de um ano foi de 5%, qual deverá ser o percentual de aumento para que ele tenha um ganho acima da inflação (aumento real) de R\$ 40,00?

Primeiro calcula-se a correção pela taxa da inflação para o salário, da seguinte forma

$$R\$ 1\,045,00 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = R\$ 1\,097,25 .$$

Soma-se a este valor R\$ 40,00 de aumento real, totalizando R\$ 1 137,25 que seria o valor do novo salário desse trabalhador.

Para determinar o aumento percentual do salário, resolve-se a seguinte equação:

$$R\$ 1\,137,25 = R\$ 1\,045,00 \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{R\$ 1\,137,25}{R\$ 1\,045,00} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) = 1,088 \Leftrightarrow \frac{t}{100} = 0,088 \Leftrightarrow t = 8,8\%.$$

Assim o percentual de aumento do salário desse trabalhador será de 8,8%.

**Exercício proposto:** Um trabalhador ganhava, em 1º de maio de 2013, o salário de R\$ 2400,00, após 3 anos, ele teve um aumento e seu salário passou para R\$ 3200,00. Considerando que nesse período a taxa anual de inflação foi constante de 9%, diga se ele teve aumento real de salário e qual foi a taxa percentual do aumento salarial recebido.

Fonte: Próprio autor.

#### Resolução esperada para o Exercício:

No período de 1º de maio de 2013 a 1º de maio de 2014, o valor corrigido pela inflação seria dado por:

$$R\$ 2400,00 \cdot \left(1 + \frac{9}{100}\right) = R\$ 2616,00$$

Agora, de 1º de maio de 2014 a 1º de maio de 2015, seria obtido da seguinte forma:

$$R\$ 2616,00 \cdot \left(1 + \frac{9}{100}\right) = R\$ 2851,44$$

Por fim, de 1º de maio de 2015 a 1º de maio de 2016, o valor corrigido seria:

$$R\$ 2851,44 \cdot \left(1 + \frac{9}{100}\right) = R\$ 3108,07$$

Dessa maneira, o aumento percentual que ele recebeu pode ser calculado por:

$$\text{R\$ } 2400,00 \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \text{R\$ } 3108,07 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{\text{R\$ } 3108,07}{\text{R\$ } 2400,00} \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{t}{100} = 1,295 \Leftrightarrow \frac{t}{100} = 0,295 \Leftrightarrow t = 29,5\%$$

Assim, ele teve um aumento real de R\$ 91,93 e a taxa aplicada para esse aumento salarial foi de 29,5%.

Quadro 12: Atividade 5 para ser desenvolvida como estação de trabalho.

### Estação 5

Uma aplicação financeira rendeu ao aplicador, em 3 anos, um montante de R\$ 6912,00. Considerando que ele havia aplicado um valor de R\$ 4000,00, determine a taxa anual de juros dessa aplicação financeira.

A taxa de juros  $t$ , poder ser calculada utilizando a seguinte fórmula:

$$M = C \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

onde  $M$  é o montante,  $C$  é o capital (valor) aplicado inicialmente e  $n$  o tempo da aplicação.

Assim:

$$\text{R\$ } 6912,00 = \text{R\$ } 4000,00 \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 = \frac{6912,00}{4000,00} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 = 1,728 \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = 1,2 \Leftrightarrow \frac{t}{100} = 0,2 \Leftrightarrow t = 20\%$$

Portanto a taxa de juros dessa aplicação foi de 20% ao ano.

**Exercício proposto:** [UNICAMP 2108 - Adaptado] Dois anos atrás certo carro valia R\$ 50000,00 e atualmente vale R\$ 32000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano, qual será o valor do carro?

Fonte: Próprio autor.

### Resolução esperada para o Exercício:

Considerando que a taxa de depreciação é dada por  $t$ , tem-se que o valor atual do carro é determinado da seguinte forma:

$$\text{R\$ } 32000,00 = \text{R\$ } 50000,00 \cdot \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 = \frac{\text{R\$ } 32000,00}{\text{R\$ } 50000,00} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 = 0,64 \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = \pm 0,8 \Leftrightarrow \frac{t}{100} = -0,20 \Leftrightarrow t = -20\%$$

Logo, como a taxa de desvalorização é de – 20%, tem-se que para o próximo ano o valor será apenas 80% do valor de R\$ 32000,00, assim basta calcular  $0,8 \cdot R\$ 32000,00$  que resulta em R\$ 25600,00.

Como orientação para o professor, informe aos alunos/grupos que o tempo em cada estação durará em torno 20 minutos, e quando todos completarem as atividades de todas as estações será entregue o gabarito das atividades e, neste momento, deverão ser realizadas possíveis correções. O professor deverá orientá-los sobre o arquivamento das fichas.

**Encontro 5:** Hora de pôr a mão na massa!

**Duração:** 2 horas-aula.

**Local:** Sala de informática.

**Material necessário:** Computadores e/ou equipamentos, *software Excel* do pacote *MS-Office* ou similar, ficha de atividades, lápis, caneta, borracha, calculadora.

**Multidisciplinaridade:** Geografia e Sociologia.

**Descrição da Atividade:** Neste Encontro, os alunos irão analisar uma evolução da equivalência anual dos valores referentes a R\$ 100,00 depreciados pela inflação no período de 1995 a 2018, sendo o fator de correção a queda do poder de compra pelas taxas anuais da inflação obtidas a partir do Índice de Preços ao Consumidor (IPC).

Será ainda solicitado aos alunos que analisem a correção do valor da cesta básica pela inflação de acordo com o índice IPC.

Para essa atividade, deve ser disponibilizado o Quadro 12, que apresenta os índices anuais, IPC, para o período de 1995 a 2018.

Quadro 13: Inflação média anual 1995 a 2018, de acordo com o IPC/Fipe

Ano	Inflação anual	Ano	Inflação anual
1995	20,40%	2007	4,46%
1996	9,12%	2008	5,90%
1997	4,56%	2009	4,31%
1998	1,65%	2010	5,91%
1999	8,94%	2011	6,50%
2000	5,97%	2012	5,84%
2001	7,67%	2013	5,91%
2002	12,53%	2014	6,56%
2003	9,30%	2015	10,67%
2004	7,60%	2016	6,29%
2005	5,69%	2017	2,95%
2006	3,14%	2018	2,86%

Fonte: Adaptado da Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (Fipe).

Inicialmente, o professor deverá solicitar aos alunos que insiram os dados do Quadro 12 em uma planilha eletrônica<sup>2</sup>, como exemplificado na Figura 6.

Figura 6: Exemplo de preenchimento da planilha eletrônica, no *Microsoft Excel*, para realização da atividade proposta no Encontro 5

ANO	INDICE IPC DE INFLAÇÃO ANUAL	VALOR EQUIVALENTE A R\$100,00
		R\$ 100,00
1995	20,40%	
1996	9,12%	
1997	4,56%	
1998	1,65%	
1999	8,94%	
2000	5,97%	

Fonte: Próprio autor.

<sup>2</sup> O uso da planilha eletrônica tem por finalidade facilitar o trabalho com o cálculo dos valores equivalentes e do valor da cesta básica. Porém, caso a realidade da escola não torne possível, os alunos podem construir a tabela em seu caderno ou ainda em folha disponibilizada pelo professor.



Retomando as atividades realizadas no encontro anterior, em particular na Estação 1, será solicitado aos grupos que escrevam uma fórmula que permita determinar o valor atualizado pela perda do poder de compra, como por exemplo:

$$\text{Valor Atualizado} = \frac{\text{Valor Inicial}}{1 + \frac{t}{100}}$$

sendo:

- $t$  é a taxa de inflação;
- Valor Atualizado é o valor corrigido pela perda do poder de compra
- Valor Inicial é o valor que sofrerá a depreciação.

Para efetuar a correção do valor da cesta básica, será solicitado aos alunos que adicionem uma coluna na planilha já desenvolvida anteriormente e efetuem a correção dos valores, quer seja por meio de inserção de fórmulas, quer seja por uso de calculadoras, para efetuarem o cálculo linha a linha da planilha, conforme indicado na Figura 7.

Figura 7: Exemplo de tabela no *Microsoft Excel* para calcular o valor corrigido pelo IPC da cesta básica no período de 1995 a 2018

ANO	INDICE IPC DE INFLAÇÃO ANUAL	VALOR EQUIVALENTE A R\$100,00	VALOR DA CESTA BÁSICA
		R\$ 100,00	
1995	20,40%	R\$ 83,06	=D2*(1+B3)
1996	9,12%	R\$ 76,11	
1997	4,56%	R\$ 72,80	
1998	1,65%	R\$ 71,61	
1999	8,94%	R\$ 65,74	
2000	5,97%	R\$ 62,03	

Fonte: Próprio autor.

Posteriormente, os alunos deverão construir gráficos, sendo que devem discutir e escolher qual o tipo de gráfico que eles acreditam ser o mais adequado e que

facilitaria a interpretação do estudo. Os alunos poderão utilizar o *software Microsoft Excel* do pacote *MS-Office* ou equivalente para elaboração dos gráficos. Se não for possível devido à sua realidade e da escola, poderão construir os gráficos manualmente em folha de papel. Nesse caso, uma boa dica seria o professor disponibilizar papel quadriculado aos alunos.

O primeiro gráfico terá como referência o valor equivalente a R\$ 100,00 para o período de 1995 a 2018 e o segundo gráfico, o valor da cesta básica para o mesmo período.

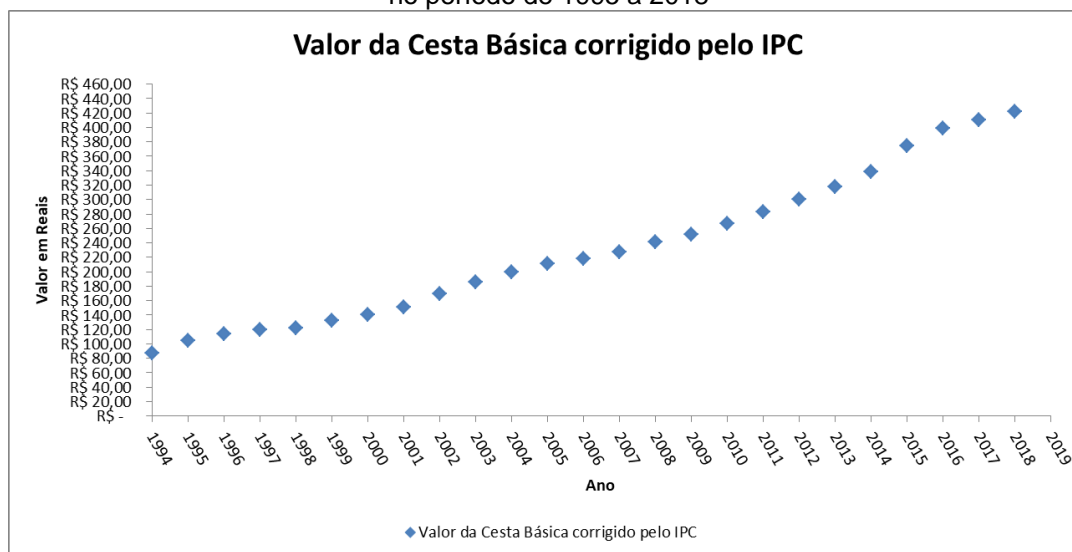
Um exemplo de gráfico que os alunos podem construir é o de dispersão. Caso escolham esse tipo, eles devem ser tal como nas Figuras 8 e 9.

Mas se nenhum dos grupos propuser esse gráfico, o professor deve apresentá-los aos alunos ao passo em que comenta as semelhanças com os que os alunos sugeriram.

Figura 8: Gráfico de dispersão da evolução do valor equivalente a R\$ 100,00 corrigidos pela inflação no período de 1995 a 2018



Figura 9: Gráfico de dispersão da evolução do valor da cesta básica corrigidos pela inflação do IPC no período de 1995 a 2018



Fonte: Próprio autor.

Durante o Encontro, o professor tem um papel fundamental de garantir que os alunos estejam executando as tarefas de forma colaborativa e/ou cooperativa. Ele sempre deve intervir quando perceber que alunos dos grupos estão ociosos ou que o grupo não permite que colegas interajam nas tarefas.

Ao final do Encontro, o professor deverá solicitar aos alunos que realizem uma pequena apresentação de 5 minutos cada, destacando o processo que o grupo executou para concluir a tarefa proposta.

Para o próximo Encontro, recomenda-se que o professor deixe a seguinte pergunta aos alunos: Como estabelecer um parâmetro para efetuar a atualização dos valores que possa substituir o IPC anual?

**Encontro 6:** Ajustando os dados!

**Duração:** 2 horas-aula.

**Local:** Sala de informática.

**Material necessário:** Computadores, *software Excel* do pacote *MS-Office*, ficha de atividades, lápis, caneta, borracha, calculadora.

**Descrição da Atividade:** Para a realização deste Encontro, deve-se começar com os alunos apresentando os parâmetros que acreditam serem adequados para efetuar a correção, substituindo os valores do IPC anual. O professor deverá fazer ponderações sobre os parâmetros que não sejam bons exemplos para essa função.

O professor deverá solicitar que os alunos determinem a média das taxas anuais, podendo utilizar o *Microsoft Excel* ou ainda uma calculadora. O valor esperado para a média das taxas do IPC anual será de 6,86%.

Assim o professor deverá propor que os alunos efetuem a correção tanto do valor equivalente a R\$ 100,00 como o valor da cesta básica pelo parâmetro que o grupo apresentou e pela média aritmética. Nas Figuras 10 e 11 é exemplificado como pode-se efetuar essas correções pela média aritmética. Os alunos devem acrescentar colunas para a correção de acordo com o parâmetro escolhido pelo grupo em suas planilhas.

Figura 10: Exemplo de planilha com a fórmula para calcular o valor equivalente a R\$ 100,00

ANO	INDICE IPC DE INFLAÇÃO ANUAL	VALOR EQUIVALENTE A R\$100,00	VALOR DA CESTA BÁSICA	VALOR EQUIVALENTE A R\$ 100,00 CORRIGIDOS PELA MÉDIA DO IPC ANUAL
		R\$ 100,00	R\$ 87,00	R\$ 100,00
1995	20,40%	R\$ 83,06	R\$ 104,75	=E2/(1+6,86%)
1996	9,12%	R\$ 76,11	R\$ 114,30	
1997	4,56%	R\$ 72,80	R\$ 119,51	
1998	1,65%	R\$ 71,61	R\$ 121,49	
1999	8,94%	R\$ 65,74	R\$ 132,35	
2000	5,97%	R\$ 62,03	R\$ 140,25	
2001	7,67%	R\$ 57,61	R\$ 151,00	
2002	12,53%	R\$ 51,20	R\$ 169,92	
2003	9,30%	R\$ 46,84	R\$ 185,73	

Fonte: Próprio autor.

Figura 11: Exemplo de planilha com a fórmula para calcular o valor da cesta básica

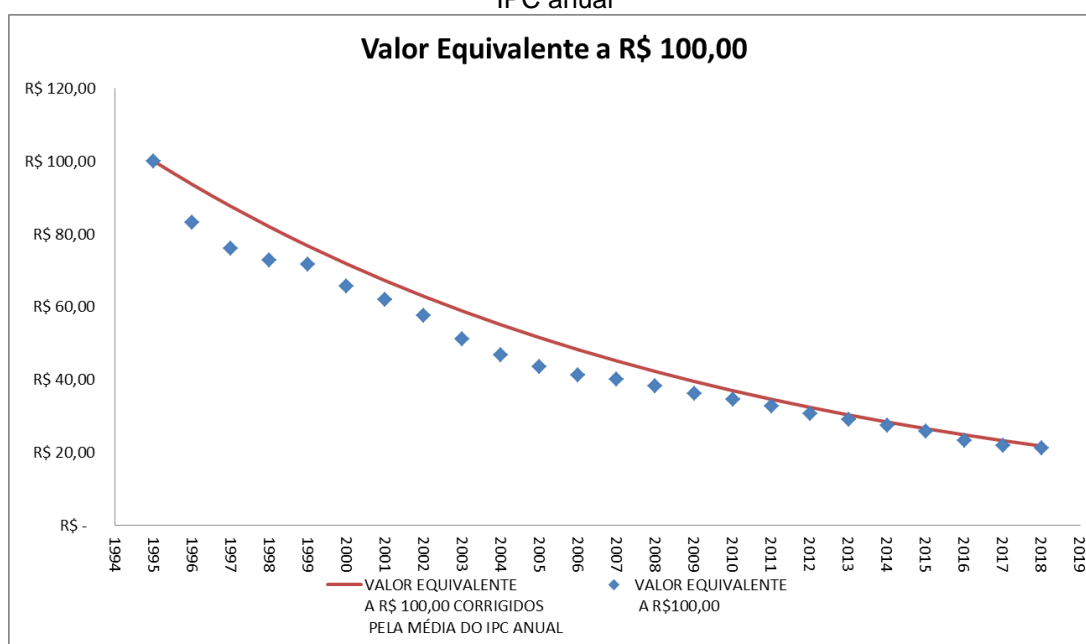
ANO	ÍNDICE IPC DE INFLAÇÃO ANUAL	VALOR EQUIVALENTE A R\$100,00	VALOR DA CESTA BÁSICA	VALOR EQUIVALENTE A R\$ 100,00 CORRIGIDOS PELA MÉDIA DO IPC ANUAL	CORREÇÃO DO VALOR DA CESTA BÁSICA PELA MÉDIA DO IPC ANUAL
1994		R\$ 100,00	R\$ 87,00	R\$ 100,00	R\$ 87,00
1995	20,10%	R\$ 83,06	R\$ 104,75	R\$ 83,58	$=F2*(1+6,80\%)$
1996	9,12%	R\$ 76,11	R\$ 114,30	R\$ 87,57	
1997	4,56%	R\$ 72,80	R\$ 119,51	R\$ 81,95	
1998	1,65%	R\$ 71,83	R\$ 121,49	R\$ 76,68	
1999	8,54%	R\$ 65,74	R\$ 132,35	R\$ 71,77	
2000	5,97%	R\$ 62,03	R\$ 140,25	R\$ 87,16	
2001	7,67%	R\$ 57,61	R\$ 151,00	R\$ 62,85	
2002	12,53%	R\$ 51,20	R\$ 169,92	R\$ 58,81	

Fonte: Próprio autor.

Após os alunos calcularem o valor equivalente a R\$ 100,00 e o valor da cesta básica, eles deverão elaborar gráficos com as seguintes séries de dados: valores corrigidos pelo IPC anual, os valores corrigidos pelo parâmetro escolhido pelo grupo e valores corrigidos pela média do IPC anual.

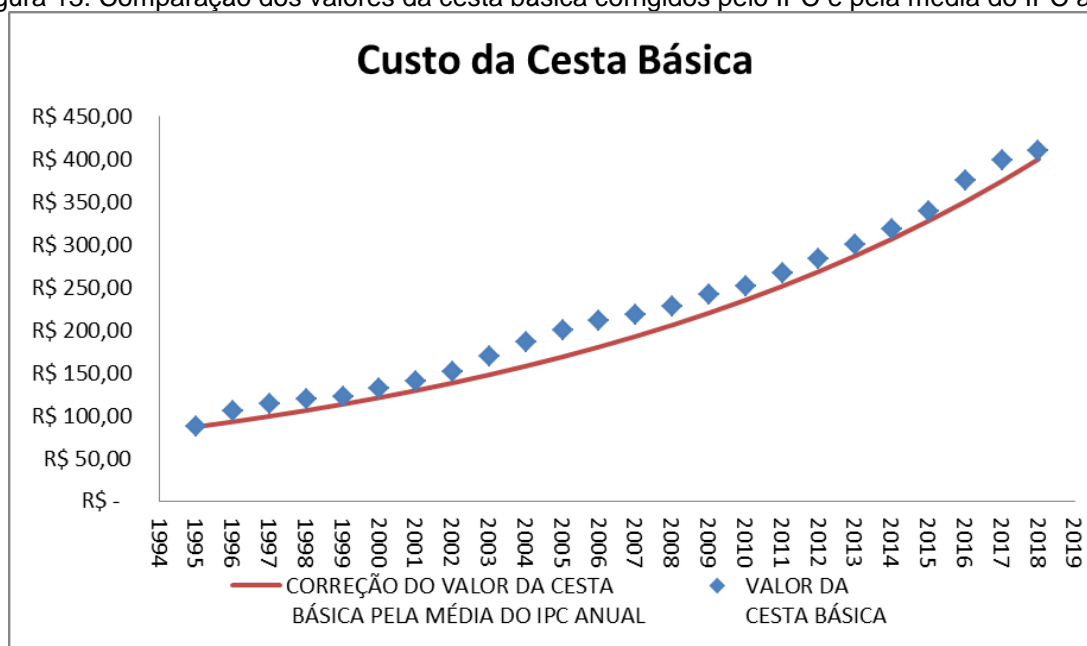
O professor deverá questionar os grupos para que expliquem as conclusões comparativas entre os gráficos nas quais chegaram. Poderá ainda apresentar os gráficos das Figuras 12 e 13 para que os alunos ampliem suas observações sobre a comparação dos resultados.

Figura 12: Comparação do Valor Equivalente a R\$ 100,00 corrigidos pela média do IPC anual e pelo IPC anual



Fonte: Próprio autor.

Figura 13: Comparação dos valores da cesta básica corrigidos pelo IPC e pela média do IPC anual



Fonte: Próprio autor.

As seguintes questões devem ser apresentadas aos alunos:

**Questão 1.** Quais as diferenças entre os valores equivalentes a R\$ 100,00 e da cesta básica a partir do uso da média das taxas do índice IPC anual com os valores obtidos no Encontro 5?

A resposta esperada para essa pergunta está na observação que a correção pela média não apresenta grandes diferenças em relação à correção pelo índice IPC. Essa observação pode ser por meio dos dados na tabela e/ou por meio das análises dos gráficos destacados nas Figuras 13 e 14.

**Questão 2:** Diante da observação das semelhanças nas correções, tanto do valor equivalente a R\$ 100,00 quanto do valor da cesta básica, pode-se dizer que o uso da média como índice de correção apresenta uma boa representação, por exemplo, de uma previsão desses valores ao longo do tempo?

Para essa questão, o que se espera dos alunos é a conclusão de que a média pode ser um bom índice para fazer a correção dos valores e que seria possível com seu uso fazer uma previsão da evolução dos valores ao longo do tempo.

Após essas questões, o professor pode conduzir uma discussão sobre os conceitos estatísticos referentes à média aritmética apresentando argumentos aos alunos para que eles percebam porquê a média seria uma boa escolha como parâmetro.

Durante a argumentação, deve passar pelo fato que a média aritmética é um conceito bastante difundido no cotidiano, que seu uso em associação à dados estatísticos, aponta a concentração de uma tendência de distribuição de certa característica.

A média fornece um indicador que pode ser interpretado como um valor típico e que pode representar, em certas circunstâncias, um conjunto de dados. Além disso, é a base para o cálculo de outras medidas tais como o desvio padrão, coeficiente de variação, de correlação, dentre outras. (MAGINA *et al.*, 2010, p. 62).

As médias são essenciais para fazer estimativas de tendências de crescimento (ou decrescimento) que estão relacionadas ao fato de que, para um grupo de dados, o crescimento será proporcional ao valor em um determinado instante, assumindo assim a natureza do crescimento exponencial.

**Questão 3:** Solicitar aos alunos que formulem equações matemáticas para representar a relação entre os valores equivalentes a R\$ 100,00 e do valor da cesta básica em função do tempo, considerando a média como fator de correção.

Em uma primeira tentativa, para estabelecer tais equações, os alunos podem utilizar o seguinte raciocínio: para o valor equivalente a R\$ 100,00, iniciou-se a correção fazendo a divisão de R\$ 100,00 por  $1 + 0,0686$ , obtendo o valor atualizado para o ano de 1996. Para uma nova atualização, eles podem tomar o resultado anterior e novamente dividir por  $1 + 0,0686$  e assim por diante. Uma possível equação inicialmente proposta pelos alunos poderia ser:

$$\text{Valor equivalente } (t) = \frac{100}{(1 + 0,0686)^t}$$

sendo  $t = 1,2,3,4,5, \dots$

Já para a cesta básica, com raciocínio análogo ao anterior, os alunos podem obter inicialmente a equação a seguir:

$$\text{Custo}(t) = 87 \cdot (1 + 0,0686)^t$$

sendo  $t = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Além disso o professor deverá conduzir os alunos, por meio de questionamentos sobre as expressões apresentadas de forma que seja possível a compreensão por todos de que as equações obtidas são equivalentes às funções exponenciais dadas a seguir:

$$V(t) = 100 \cdot (1,0686)^{-(t-1994)}$$

$$C(t) = 87 \cdot (1,0686)^{(t-1994)}$$

sendo:

- $V(t)$  o valor corresponde a R\$ 100,00 atualizado pela média do IPC anual;
- $C(t)$  o custo da cesta básica corrigido pela média do IPC anual;
- $t$  o ano de observação de acordo com a tabela apresentada, de forma que  $1995 \leq t \leq 2018$ .

O professor ainda poderá solicitar aos alunos que determinem imagens das funções para alguns valores de  $t$ , por exemplo,  $t = 2,5$  e  $t = 12,2$ , fazendo questionamentos sobre a continuidade temporal da variável  $t$ .



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho foi desenvolvido e proposto para se trabalhar o ensino de funções exponenciais seguindo os princípios de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa em conjunto com Modelagem Matemática. Por uma questão de tempo, infelizmente não foi possível realizar a aplicação das atividades junto a um grupo de alunos, tampouco aprofundar mais no desenvolvimento do estudo das funções exponenciais.

Durante o desenvolvimento do trabalho ocorreu um grande aprendizado da forma como as Aprendizagens Colaborativa e Cooperativa, que buscam integrar mais os alunos no processo de ensino e aprendizagem, podem proporcionar um ambiente mais favorável ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

Uma reflexão que o autor destaca está ainda na necessidade de se mesclar os princípios de novas formas de interagir em sala de aula, com momentos de uso de formas mais tradicionais de ensino, sempre adequando, de acordo com o momento ou necessidade, qual a melhor estratégia a ser usada para proporcionar o desenvolvimento das habilidades necessárias pelos alunos.

Ainda durante a elaboração, o trabalho permitiu que o autor aprendesse e aprofundasse seus conhecimentos em relação aos conteúdos apresentados e como eles irão apresentar melhoras em sua prática docente, levando a romper alguns paradigmas sobre como ensinar a matemática e realizar atividades em grupo.

Nas atividades propostas, foi seguida uma construção de conceitos sobre inflação e os efeitos desse fenômeno na vida cotidiana, destacando aspectos multidisciplinares com áreas de Humanidades. A análise da maneira como a inflação atua na perda do poder aquisitivo e na evolução dos preços ao longo do tempo, presente no cotidiano dos alunos, foi subsídio para a Modelagem Matemática e a construção do modelo exponencial para o estudo.

Assim, espera-se que este trabalho possa contribuir para a compreensão de que o estudo de funções exponenciais tem uma relação direta com o dia a dia dos alunos, não sendo um conteúdo apresentado tão somente para cumprir uma parte do programa do ano escolar. E que ainda seja capaz de provocar mudanças no trabalho

em sala de aula, tornando os alunos mais participativos e engajados no processo de ensino e aprendizagem, assim como desenvolvendo professores menos centralizadores, que atuem de forma a facilitar a construção do conhecimento por parte dos alunos.

Existe também o desejo de aplicar e acompanhar o desenvolvimento deste trabalho em ambientes escolares diversos. Espera-se que seja possível alcançar seus objetivos de ensino e aprendizagem para os temas matemáticos propostos. Espera-se ainda que, por meio dos princípios presentes nos princípios de Aprendizagem Colaborativa e Cooperativa, seja possível observar um grande desenvolvimento das habilidades socioemocionais dos alunos. Após a sua implementação em sala de aula, poderá ser desenvolvida outras análises, quer seja buscando uma adequação das propostas para que atinjam seus objetivos, quer seja uma análise do impacto nos resultados de aprendizagem dos alunos.

Por se tratar de uma proposta de atividades, espera-se que o presente trabalho possa ser inspirador para outros professores que escolham utilizá-lo da forma proposta ou, sempre que necessário, realizando adaptações de acordo com a realidade ou até mesmo servindo de ponto de partida para construção de outras propostas para o desenvolvimento do conteúdo com seus alunos.

## REFERÊNCIAS

ALCÂNTARA, Paulo Roberto de Carvalho; BEHRENS, Marilda Aparecida; CARVALHO, Ronaldo Gomes de. **CDROM do Projeto PACTO: Pesquisa em aprendizagem colaborativa com tecnologias interativas (1999-2000)**. Curitiba, PR: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2001.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, v. 17, n. 22, p. 19-35, 2004. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10529/6935>. Acesso em: 30 abr. 2020.

ARONSON, Elliot *et al.* **The Jigsaw Classroom**. Beverly Hills: Sage Publications, 1978.

ARONSON, Elliott.; PATNOE, Shelley. **Cooperation in the classroom: The jigsaw method**. 3. ed. Londres: Pinter & Martin, Ltd., 2011.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino - aprendizagem com Modelagem Matemática**. Campinas, SP: Editora Contexto, 2002.

COSTA, Maria Helena Carvalho da; LIMA, Bernúbia Almeida dos Santos; Lima, Grayce Kelly Alves dos Santos; Barbosa, Celso José Viana. **A tabela de Flanders como ferramenta para observação da interação verbal professor-aluno**. **Scientia Plena**, Associação Sergipana de Ciência, Itabaiana, v. 8, n. 12, p. 1-9, 2012. Disponível em: <https://www.scientiaplena.org.br/sp/article/view/1274>. Acesso em: 10 nov. 2020.

DAMIANI, Magda Floriana. **Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios**. **Educar**, Curitiba, n. 31, p. 213-230, 2008. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13.pdf>. Acesso em 20 out. 2020.

FATARELI, Elton Fabrino *et al.* **Método cooperativo de aprendizagem jigsaw no ensino de cinética química**. **Química Nova na Escola**, v. 32, n. 3, p. 161-168, 2010.

FREIRE, Paulo. **A Educação na Cidade**. São Paulo: Cortez Editora, 1991.

GARBIN, Monica Cristina. **Desenvolvimento de um programa de capacitação para professores de Matemática do ensino público brasileiro com enfoque na aprendizagem colaborativa**. 2014. 117 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/319165>. Acesso em: 8 jul. 2020.

\_\_\_\_\_. **Uma análise da produção audiovisual colaborativa: uma experiência inovadora em uma escola de ensino**. 2010. 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/251398>. Acesso em: 8 jul. 2020.

GUIDORIZZI, Hamilton. Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

HOUAISS, Antonio. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

JOHNSON, David W.; JOHNSON Robert T. **Learning Together and Alone: Cooperative, Competitive, and Individualistic Learning**. 4a. ed. Boston, MA: Allyn & Bacon, 1999.

LIBÂNEO, José Carlos. **Adeus professor, adeus professora: novas exigências educacionais e profissão docente**. São Paulo: Cortez, 1998.

LOPES, José; SILVA, Helena Santos. **A aprendizagem cooperativa na sala de aula: Um guia prático para o professor**. Lisboa: Lidel, 2009.

MAGINA, Sandra; CAZORLA, Irene; GITIRANA, Verônica, GUIMARÃES, Gilda. **Concepções e concepções alternativas de média: Um estudo comparativo entre professores e alunos do Ensino Fundamental**. *Educar em Revista*, Curitiba, n. especial 2, p. 59-72, 2010. Editora UFPR. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/er/nspe2/04.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2020.

MEYER, João Frederico da Costa; CALDEIRA, Ademir Donizete; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos - funções**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

MURAKAMI, Carlos; IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 2.

PANITZ, Theodore. **Collaborative Versus Cooperative Learning: A Comparison of the Two Concepts Which Will Help Us Understand the Underlying Nature of Interactive Learning**. 1999. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED448443.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2020.

ROGERS, Carl Ransom. **Liberdade para aprender**. 2. ed. Belo Horizonte: Interlivros de Minas Gerais Ltda, 1972.

SÁNCHEZ, Antonio Miguel Pérez; SERRA, Patrícia Poveda. **Efectos Del aprendizaje cooperativo en la adaptación escolar**. *Revista de Investigación Educativa*, Murcia, v. 26, n. 1, p. 73-94, 2008. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/2833/283321884005.pdf>. Acesso em: 16 out. 2020.

SANTOS, Almeida Bernúbia *et al.* **Análise do discurso em aulas de Física em Itabaiana-SE**. *Scientia Plena*, Itabaiana, v. 8, n. 12, 2012. Disponível em: <https://www.scientiaplena.org.br/sp/article/view/1276>. Acesso em: 14 nov. 2020.

SAVIANI, Demerval. **Escola e democracia**. 34. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2001.

TAVARES, Claudia; SANCHES, Isabel. **Gerir a diversidade: Contributos da aprendizagem cooperativa para a construção de salas de aula inclusivas**. *Revista Portuguesa de Educação*, Braga, v. 26, n. 1, p. 307-347, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.21814/rpe.2994> , Acesso em: 15 nov. 2020.

TOLEDO, Luciana Alcantara de. **Ensino da função exponencial: análise de resultados**. 2018. 124 f. Dissertação (Mestrado - Programa de Mestrado Profissional

em Rede Nacional – Profmat) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Unesp, São José do Rio Preto, 2018. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/157239>. Acesso em: 16 ago. 2020.

TORRES, Patrícia Lupion; IRALA, Esrom Adriano Freitas. **Algumas vias para entretecer o pensar e o agir**. Curitiba: SENAR-PR, 2007.

TORRES, Patrícia Lupion; IRALA, Esrom Adriano Freitas. **Aprendizagem Colaborativa: Teoria e Prática**. In: TORRES, Patrícia Lupion. **COMPLEXIDADE: REDES E CONEXÕES NA PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO**. Curitiba: Kairós Edições, 2014. p. 61-94. Disponível em: [https://www.agrinho.com.br/site/wp-content/uploads/2014/09/2\\_03\\_Aprendizagem-colaborativa.pdf](https://www.agrinho.com.br/site/wp-content/uploads/2014/09/2_03_Aprendizagem-colaborativa.pdf). Acesso em: 8 fev. 2020.