INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

Adição e Subtração de Frações segundo o Método Desenvolvido por Leonhard Euler no seu Livro *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl (1738)*

Hercules D'Almeida Machado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pela Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta.

IFSP
São Paulo
2021

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

m149a Machado, Hercules D' Almeida
Adição e Subtração de Frações segundo o Método Desenvolvido por Leonhard Euler no seu Livro Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl (1738) / Hercules D' Almeida Machado. São Paulo: [s.n.], 2021.
129 f. il.

Orientadora: Profa Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2021.

1. História da Matemática. 2. Frações. 3. Leonhard Euler. 4. Método. 5. Educação Básica. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD

HERCULES D'ALMEIDA MACHADO

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES SEGUNDO O MÉTODO DESENVOLVIDO POR LEONHARD EULER NO SEU LIVRO *EINLEITUNG ZUR RECHEN-KUNST ZUM GEBRAUCH DES GYMNASII BEY DER KAYSERL (1738)*

Dissertação apresentada em 30 de setembro de 2021 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta
IFSP – Campus São Paulo
Orientadora e Presidente da Banca

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
IFSP – Campus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo (USP)
Membro da Banca

"Cada pessoa, apesar de seu modo de vida, deveria ter tido uma necessidade real de Matemática, porque ela permite a todos distinguir qualquer coisa duvidosa da confiável, a verdade de uma mentira".

Leonhard Euler

Aos Meus Pais:

João Machado

e

Maria de Lourdes D'Almeida Machado,

em memória

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer a minha família: Erika Cristina Macedo Maurici (querida esposa), aos meus amados filhos Pedro Henrique Maurici Machado e Bruno Maurici Passarella, pelo amor, compreensão, apoio e incentivos dados a mim para cumprir mais uma jornada na carreira profissional e acadêmica.

Gostaria, também, de agradecer a minha orientadora para o presente trabalho de dissertação de mestrado Profª. Drª. Valéria Ostete Jannis Luchetta, cujo trabalho me ajudou a galgar mais um degrau na carreira como docente e permitiu conhecer novos campos de trabalho em Matemática.

Também, venho aqui agradecer ao trabalho e dedicação de todos os professores e coordenadores do Curso de Mestrado Profissional PROFMAT, do Instituto Federal de São Paulo, cujas orientações e ensinamentos trouxeram para mim mais conhecimento sobre o trabalho na Educação Matemática, além de me aprimorar. Também agradeço aos membros da banca examinadora, que vieram analisar e conhecer este meu trabalho.

Ainda gostaria de agradecer àqueles que, a distância – seja por carta eletrônica (*e-mail*), seja por indicar livros e documentos, em conversas no ambiente de trabalho – permitiram que eu pudesse recolher informações, encontrar subsídios e elementos para construir esse elegante trabalho que tenho o privilégio de construir e definir.

Muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho de dissertação – mestrado profissional em Matemática – apresenta o método de Leonhard Euler (matemático e cientista do século XVIII), no tocante ao ensino das operações de adição e subtração de frações. Este material é parte do livro escrito pelo mestre em 1735 intitulado *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl* (1738), o qual foi idealizado, pelo referido mestre, para ser usado no curso dito Ginásio (Educação Básica) na recém criada Academia de Ciências de São Petersburgo (1727). A análise da História da Matemática, neste trabalho, é apresentada como ferramenta auxiliar para o ensino de Matemática: alguns usos são exemplificados e comentados, mas a proposta, aqui indicada, tem a intenção de estudar o assunto matemático à maneira como o mestre, originalmente, o desenvolveu e o praticou na sua época. Acreditamos que, assim, o aprendizado se torna mais claro e acarreta mais lucidez sobre o assunto. Assim, o método de Euler para o estudo das operações de adição e subtração de frações é desenvolvido seguindo-se esse princípio: na forma de *tarefas didáticas*, criadas para não só incrementar o ensino de tal assunto na Educação Básica (como foi a intenção de Euler na sua época), mas também permitir ao profissional da Educação conhecer o belo trabalho original do mestre e, também, aperfeiçoar-se. Apresenta-se, também, o modo que o assunto está sendo tratado na rede pública e reconhece-se, também, que o método de Euler sobre a adição e subtração de frações está em pleno acordo com os parâmetros da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e Curriculo da Cidade do Município de São Paulo. Este material histórico encontrado no livro de Leonhard Euler *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*, é um convite para se visitar no tempo o século XVIII, na Rússia Imperial, e entender como o ensino das operações com frações era feito, como alguns pensamentos matemáticos da Educação Básica eram entendidos na época, e, também, perceber quão atual é, ainda, a maneira que tal método desenvolve o ensino desse tema.

Palavras-chaves: História da Matemática, Frações, Leonhard Euler, Método, Educação Básica, Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

The present dissertation – professional master's degree in Mathematics – presents the method of Leonhard Euler (Eighteenth Century mathematician and scientist), regarding the education about operations of addition and subtraction of fractions. This material is part of the book written by the master in 1735 entitled *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl* (1738), which was conceived, by the said master, to be used in the course said Gymnasium (Basic Education) at the newly created St. Petersburg Academy of Sciences (1727). The analysis of the History of Mathematics, in this work, is presented as an auxiliary tool for mathematics teaching: some uses are exemplified and commented, but the proposal, indicated here, has the intention of studying the mathematical subject as the masters originally developed and practiced it in their time. We believe that, in this way, learning becomes clearer and brings more lucidity to the subject. Therefore, Euler's method for the study of the operations of addition and subtraction of fractions is developed following this principle: in the form of *didactic tasks*, created not only to increase the teaching of this subject in Basic Education (as was Euler's intention in his time), but also to allow the professional of Education to know the beautiful original work of the master and, also, to improve himself. It is also presented, the way that the subject is being treated in public schools and it is also recognized that Euler's method about addition and subtraction of fractions is in full accordance with the requirements of the BNCC (Base Nacional Comum Curricular) and Curriculo da Cidade do Município de São Paulo. This historical material found in the book by Leonhard Euler *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*, is an invitation to visit in time the Eighteenth Century, in Imperial Russia, and to understand how the teaching of operations with fractions was done, how some mathematical thoughts of Basic Education were understood at the time, and also to realize how current is still the way that such method develops the teaching of this subject.

Keywords: Mathematics History, Fractions, Leonhard Euler, Method, Basic Education, Teaching and Learning.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

SUMÁRIO

Pág.

INTRODUÇÃO

Trabalhar com Matemática é, antes de tudo, um privilégio: é, todos os dias, tonificar-se com sabedoria. É iluminar o caminho em direção à descoberta: seja de conceitos, seja de aprendizado; aprendizado que nos é revelado nas relações humanas, no debate das ideias.

É, principalmente, trazer a verdade sobre algo que nos é necessário!

E nesse trabalho de dissertação não se caminhou diferente: já no Capítulo 1, por exemplo, relato minha experiência profissional, e que me permitiu alcançar o PROFMAT em 2019, não só para buscar aprimoramento e atualização, como estudioso de Matemática, mas também soluções para os desafios que surgem no ambiente de trabalho: a sala de aula.

Como professor na Educação Básica (trabalho no Ensino Fundamental) pude, nesta pesquisa, caminhar pela História da Matemática e alcançar, no século XVIII, o assunto sobre adição e subtração de frações – tema de primeira necessidade para a continuidade dos estudos dos alunos no Ensino Fundamental.

Para tanto, fui "beber" na obra do magnífico matemático e cientista Leonhard Euler, que escreveu em 1735: *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl* (1738) – Introdução à Arte da Aritmética para a Utilização no Ginásio da Academia Imperial (tradução livre).

Ainda no Capítulo 1, apresento um registro das primeiras ações na direção da pesquisa e observações sobre esta: como um "diário de bordo" de nau que navega, no caso, em "águas matemáticas" pela primeira vez.

Vimos também um pouco sobre Leonhard Euler: ficamos sabendo, por exemplo, que ele chegou a Academia de São Petersburgo, Rússia, em 1727, com 20 anos apenas e inicialmente como um *élève* (estudante da Universidade) e, um pouco mais tarde, recebeu o título de professor com salário inicial de 300 rublos (segundo relato passado para mim, via contato eletrônico, *e-mail*, da pesquisadora sênior na já mencionada Academia, Sra. Olga Kirikova – que me apresentou documentos qua atestam tal registro – veja anexo).

No Capítulo 2, estudamos mais sobre alguns aspectos do uso da História da Matemática, como ferramenta a completar o ensino de Matemática, propriamente, bem como a sua importância para melhorar o aprendizado.

E, como sugestão para o sucesso da aprendizagem, vimos como se aprende à maneira dos mestres: indicando, assim, que a História da Matemática pode exercer um papel motivador, pois apresenta as razões e os desafios enfrentados para a criação, desenvolvimento e estudo de teorias ou elementos da Matemática.

A História da Matemática fornece subsídios, recursos ou procedimentos para viabilizar a compreensão de conceitos e questões matemáticas. Ela é um instrumento cuja calibração está garantida quando temas matemáticos são vistos e estudados, na sua origem, nas obras dos mestres – mentes brilhantes que iluminaram o caminho da Matemática.

O potencial da História da Matemática para complementar o ensino de Matemática esbarra na sua vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço. Essa observação permite alcançar mais lucidez sobre determinados temas, como aquele que é o cerne deste trabalho de dissertação: a adição e a subtração de frações.

No Capítulo 3, desenvolvemos uma lista de tarefas didáticas, à maneira que são apresentadas no livro *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*, com adequações e comentários feitos à luz do que se entende, hoje, do assunto, como, por exemplo, o conceito outrora mencionado como **menor número divisível comum** – atualmente denominamos **mínimo múltiplo comum (mmc)**.

A finalidade da lista de tarefas é principalmente conhecer o método de Euler para o ensino e a aprendizagem sobre a adição e subtração de frações (Capítulo 7 do livro de Euler já mencionado), para aplicá-la na Educação Básica, a fim de melhorar seu aprendizado – que, como podemos ver neste capítulo, tal método traz muito mais clareza e entendimento sobre estes conceitos, adição e subtração de frações – além de permitir que o profissional em Educação possa se aperfeiçoar, estudando à maneira que os mestres do passado faziam. Após a apresentação da regra, temos alguns exemplos de aplicação (para fixação), acompanhados, logo em seguida, por exercícios, cujos temas foram tirados dos exemplos do livro de Euler. Na sua origem, estes exemplos referem-se à mudança de escalas de medidas de grandezas, questões de herança, por exemplo, indicando o porquê de existir o curso, na época: atender ao cidadão comerciante ou àquele que desejasse continuar seus estudos na Universidade.

Nas notas de rodapé, trazemos o texto tirado do original em alemão (como se estivéssemos "ouvindo" a voz do mestre Euler, originariamente, como se ali estivesse gravada, para nos guiar).

A tradução da regra para a língua portuguesa foi feita pela consulta do texto em inglês, traduzido diretamente do original da obra em alemão, feito pelo Prof. Dr. Ian Bruce, ligado ao *site Euler's archive*. Prof. Ian Bruce mantém também outro *site* intitulado *17centurymath.com*, onde apresenta outras obras matemáticas, não só de Euler, mas de outros matemáticos, que atuaram no século XVII e XVIII.

Ainda os esquemas de cálculo e outras apresentações numéricas, apresentadas na lista de tarefas didáticas, vieram do livro original de Euler, em alemão(1).

Esse capítulo traz o potencial para um curso de aperfeiçoamento e de extensão para

(1) *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl* (1738), de Leonhard Euler (1707 – 1783). Disponível em: https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/euler_rechenkunst01_1738. Acesso em: 20 nov 2020.

professores atuantes na Educação Básica. Notoriamente, ele vem ao encontro dos objetivos do PROFMAT e do Plano Nacional de Educação – o qual, resumidamente, menciono: melhorar o ensino da Matemática.

No Capítulo 4, reconhecemos a necessidade de se saber operar as frações – haja vista a importância desse assunto mencionado na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e pelo Currículo da Cidade do Município de São Paulo, cidade onde trabalho.

Essa necessidade se estende por outros níveis da Educação Básica e Superior, como podemos ver, por exemplo, nos cursos profissionalizantes em Exatas.

Para esse reconhecimento, verificamos como esse assunto é tratado na bibliografia escolhida para ser utilizada na rede pública e destacamos o fato de que o método de Euler (aqui apresentado no que se refere à adição e subtração de frações) não só atende aos parâmetros da BNCC e Currículo da Cidade, mas também, é uma maneira de se tratar o assunto de adição e subtração de frações, produz mais lucidez.

Por fim, no Capítulo 5, convido à reflexão, o leitor, não só sobre os livros sugeridos pelo PNLD (Programa Nacional do Livro e do Material Didático), no Capítulo 4 apresentados, mas também sobre os efeitos do uso de tais materiais.

Questões como: “Devemos protelar mais e supor que, no futuro, a necessidade fará o estudante buscar o conhecimento da adição e subtração de frações, de que precise?”; “Devemos negar a ele (estudante) esse conhecimento, agora, ou, fazer como Euler disse em seu projeto pedagógico de 1737 *que cada pessoa, apesar de seu modo de vida, deveria ter tido uma necessidade real de Matemática, porque ela permite a todos distinguir qualquer coisa duvidosa da confiável, a verdade de uma mentira?* (EULER, 1731 *apud* KIRIKOVA, 2021, tradução livre)”, ou seja, “Devemos assumir uma pedagogia que revele a verdade das coisas ou devemos adiá-la oportunamente, mesmo podendo apresentá-la agora?”, todas elas vêm à mente no Capítulo 5 para debate e reflexão. São algumas questões importantes para se repensar a prática pedagógica de Matemática.

Ainda outras conclusões e observações interessantes, vistas na referida obra de Euler como a ausência de sinais operatórios indicativos de adição, subtração, multiplicação e divisão (o que nos revela uma segurança no desenrolar dos cálculos – pleno conhecimento do que se está executando com os números); o significado da divisão na época (percebida como algo que ocorre somente se o divisor for, no mínimo, igual a dois, apesar do quociente poder ser nulo ou valer a unidade, em alguns casos); o caso do divisor ser zero, enfim, são todas reflexões profundas apresentadas na Educação Básica pela obra de Euler sobre aspectos simples da Matemática.

Sem dúvida, a obra de Euler, *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey* *der Kayserl*, é um registro não só de conteúdos (um livro técnico), mas também é um documento histórico e de impressões de pensamentos da época sobre conteúdos matemáticos e de como se entendia tal conhecimento no século XVIII, na Europa.

E um dos produtos dessa dissertação é a tradução de partes dessa obra para a língua portuguesa, o que permitirá que outros profissionais possam ter acesso aos brilhantes argumentos, comentários e ensinamentos do mestre Leonhard Euler.

CAPÍTULO 1: VIVÊNCIA COMO PROFESSOR – ENCONTRO COM A OBRA DE LEONHARD EULER

Trabalhar com Matemática é, ao mesmo tempo, privilégio e fascinação. Privilégio porque, como forma de pensar, traz seu método apoiado no da Ciência, o que a torna incontestável. Na sua linguagem e encadeamento lógico perpassa-se pela revelação dos segredos, desde aqueles da natureza (haja vista o terreno fértil que é o campo das ditas Ciências Exatas, que usam e abusam da "ferramenta Matemática"), até os revelados por outras áreas do conhecimento humano, como as Artes, que trazem redemoinhos de beleza, nas espirais desenhadas, por exemplo, para revelar a bela construção da espiral na concha do caracol.

E fascinação, pois é ciência de discussão, debates, ensino e aprendizagem. Nestas, as discussões sobre as validades dos teoremas e axiomas, elementos básicos no debate das ideias matemáticas, trazem a riqueza ao saber, pois se tornam instrumentos de ensino, para elucidar conceitos, trazer novas ideias, completar argumentos e revelar a compreensão imediata e lógica daquilo que se estuda, para se aprender.

Como apaixonado pela ciência, desde jovem optei pelo magistério em Matemática para aplacar minha eterna curiosidade sobre as coisas e poder transmitir o que descobria, como professor, para aqueles que quissessem me ouvir, nesta ciência.

Comecei em janeiro de 1992 a estudar de fato Matemática, no Instituto de Matemática e Estatística da USP (Universidade de São Paulo), mesmo já a tendo conhecida antes, com o seu rigor, ao estudar no ensino médio da, então, Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx) a obra conhecida em 10 volumes (na época) intitulada Fundamentos da Matemática Elementar, de Gelson Iezzi e parceiros (1985). Ali reconheci minha vocação para a Licenciatura e até hoje, quase 30 anos depois, ainda exerço a atividade docente em Matemática.

Trabalhei por muito tempo, 7 anos na verdade, depois de formado, em 1996, em instituições privadas de ensino inicialmente. Na rede pública municipal da cidade de São Paulo, comecei em julho de 2002, concomitantemente com a privada e na rede do Estado de São Paulo – nesta, por 1 ano e meio somente.

E, por experiência declaro que as dificuldades encontradas no ensino público passam desde em se ter material (lápis e caderno) para o aluno estudar, até o local onde estudar, comer e descansar. Os estudantes da rede pública, na sua maioria, atualmente, trazem muitas carências, o que não deveria ocorrer. Levar mais a sério a educação é uma necessidade que se deve reconhecer para se crescer como povo e nação!

Assim, trago o testemunho de minha prática como docente, ressaltando a necessidade de se usarem novas ferramentas (ou ferramentas diferentes, às vezes, antigas até) para se ensinar conceitos de matemática, como, por exemplo, a adição e a subtração das frações.

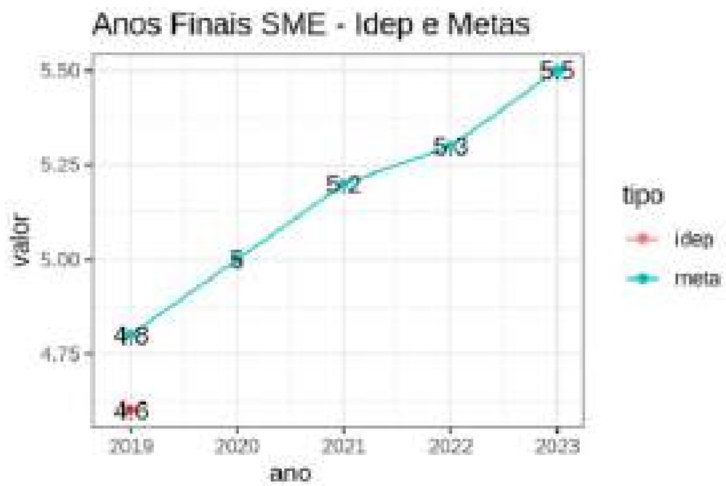
As operações iniciais com números naturais bem como o trato com as frações (seu reconhecimento e significado, as operações envolvidas) são o suporte inicial, aprendidas no ensino fundamental, para que o aluno possa seguir com tranquilidade e clareza nos seus estudos em Matemática. Saber bem como trabalhar com as frações é ter muito mais tranquilidade nos estudos e elevar-se a autoestima: já escutei de alunos, nesses quase 30 anos de trabalho no ensino da Matemática, que tudo estava bem até as frações chegarem – como quase um "divisor de águas" entre a matemática clara e a matemática obscura!

O ensino de frações é reconhecido, há muito tempo, como imediatamente decorrente do aprendizado das quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) no ensino fundamental.

Disso, o professor de Matemática (profissional da Educação) deve ter em mente a necessidade do reconhecimento dessas operações elementares e do uso incipiente das frações para os primeiros passos no estudo da Matemática.

Também, deve-se ter em mente, que a busca de novos subsídios para melhorar a aprendizagem e sua aplicabilidade poderá resultar em melhorias nas avaliações institucionais como, por exemplo, a Prova São Paulo, cuja meta, para o ano de 2019, era 4,8 para o valor do IDEP (Índice de Desenvolvimento da Educação Paulistana); o que não ocorreu, pois o resultado foi de 4,6. Esse índice foi idealizado em 2018, como parte do programa do Currículo da Cidade, e começou a ser aplicado pela primeira vez em 2019 (Decreto nº 58.839, de 3 de julho de 2019). A cada cinco anos, as metas serão revistas.

Figura 1.1 – Gráfico de metas para o IDEP e resultado alcançado.



Fonte: SME Portal Institucional – Cidade de São Paulo, Educação.

Enfim, buscando o aprimoramento profissional, nestes quase 30 anos de atividade docente, frequentei cursos de aperfeiçoamento complementares e, em 2019, alcancei o PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática), indicado por colega e amigo da instituição de ensino em que trabalho atualmente (EMEF Irineu Marinho).

Mais um vez voltando às cadeiras escolares, tive acesso ao conhecimento matemático no que tange à pesquisa e, no momento oportuno do estudo, no curso PROFMAT, pude me encontrar com mais profundidade com a obra *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl* (1738), de Leonhard Euler – escrito em 1735 em alemão por ele.

Neste trabalho para a educação básica, para atender a exigência da récem criada Academia de Ciências de São Petersburgo, afim de contemplar o curso de preparação para aqueles que quisessem estudar nas universidades e, também, atender aos cidadãos no tocante às suas necessidades mercantis, Euler apresentou um método de ensino sobre as operações aritméticas básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com os números inteiros positivos e, também, as mesmas operações para as frações.

Tudo isso veio atender as minhas necessidades atuais, pois trabalho na educação básica (ensino fundamental II); e buscar novas formas de ensino ou retomar antigas, no intuito de permitir ao estudante da educação básica acessar esse incipiente conhecimento matemático (tão necessário para se prosseguir nos cursos mais avançados e práticos da Matemática e afins), são ações que o docente, profissional, deve sempre fazer.

Disso, então, para compreeder esse trabalho mais aprofundadamente, entrei em contato com instituições estrangeiras: Universidade do Pacífico, Academia de Ciências e Humanidades de Berlim – Brandenburg e Academia de Ciências de São Petersburgo, cujas trajetórias de encontros apresento a seguir.

A relevância de se apresentar a trajetória da pesquisa (como num "diário de bordo" de um navio, que "navega por águas, neste caso, matemáticas") é vislumbrar o caminho: registrar os pontos de desafios (obstáculos superados) para se alcançar uma conclusão satisfatória, e indicar um itinerário a seguir, como uma trilha ou "marcas na parede", para que outros possam também percorrer.

A pesquisa em si mostra a necessidade de se registrar cada passo na direção da conclusão para, também, fazer mudanças na trajetória.

No início, 29 de maio de 2020, vivendo as consequências iniciais de uma pandemia (COVID -19), recebi a informação de que seria orientado pela Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta, nossa professora de Aritmética do Programa de Mestrado Profissional. Mas, somente em 10 de junho do corrente ano, houve o momento da primeira reunião com ela, onde, para uma primeira apresentação e conhecimento do tipo de trabalho a desenvolver, a Profa. Dra. Valéria Luchetta me indagou sobre minhas ações como docente no ensino fundamental da prefeitura de São Paulo (local onde trabalho como professor de ensino fundamental II e médio, há quase 20 anos): com quais séries trabalho e quais conteúdos de Matemática tenho preferência de trabalhar.

Notoriamente, trabalho com as turmas 6º, 7º, 8º e 9º anos, do ensino fundamental II, seguindo, é claro, as orientações do Currículo da Cidade e instruções normativas atualizadas para o ensino, trabalhando com conteúdos separados por **objetos de conhecimento,** a saber: **números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, processos matemáticos**. No entanto, os conteúdo de minha preferência são Álgebra e Aritmética (esta, útima, é vista como objeto de conhecimento indicado por "**números**" na grade pública).

Ainda neste dia, a Sra. Orientadora me apresentou quatro possibilidades para a escolha de temas de pesquisa: (1ª) trabalhar com o livro *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*, de Leonhard Euler, publicado em 1738 (escrito em 1735 em alemão pelo próprio Euler, como uma tradução do seu primeiro trabalho sobre este assunto, escrito por ele mesmo, em latim; posteriormente foi traduzido, também, para russo); escolheria um capítulo e nele se desenvolveria a pesquisa; (2ª) trabalhar com as cartas de Euler para a princesa alemã (duma época em que ele foi tutor da princesa, sobrinha do monarca da Prússia, Frederico II, século XVIII), onde trazem conteúdos de matemática trabalhados por Euler. Assim como na 1ª possibilidade, escolheria um capítulo para pesquisar; (3ª) trabalhar com o livro "Elements of Algebra", também de Leonhard Euler, escolhendo um dos tópicos para estudar; e, por fim, (4ª) eu estaria livre para escolher um tema de pesquisa diferente.

Os temas trazem significativo interesse pois esbarram no desejo pessoal de explorar e conhecer mais sobre a Álgebra e Aritmética, com mais profundidade. Ainda, as três primeiras sugestões indicam trabalhos do brilhante matemático Leonhard Euler, cujas obras se destacam não só pelo extenso conteúdo desenvolvido e estudado por ele, mas também, pela linguagem simples e bastante acessível, a qualquer um que se prontifique a estudar, aquilo que o incrível matemático Euler demonstrou conhecer.

Assim, por reconhecer o pouco tempo disponível para efetuar o trabalho (não há tempo de explorar todas as sugestões feitas pela Sra. Orientadora) e, também, dado o interesse pessoal em efetuar um trabalho observando aspectos históricos e, principalmente, aqueles voltados ao meu trabalho no Ensino Fundamental, escolhi como tema da pesguisa a primeira sugestão apresentada: o estudo do livro *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*, já mencionado, de Leonhard Euler. Essa ratificação foi apresentada em 24 de junho, na reunião quinzenal agendada com a Profa. Dra. Valéria Luchetta.

Ainda neste mesmo mês, encaminhei às bibliotecas estrangeiras (cujos endereços eletrônicos e *links* de acesso me foram apresentados pela Sra. Orientadora; outros, foram conseguidos via pesquisa em *sites* de busca) perguntas sobre o livro mencionado.

Dos endereços e *sites* sugeridos pela Profa. Dra. Valéria Luchetta, está o *site Euler's archive*, onde consegui o registro das obras de Euler (*Opus Ominia*).

O livro em alemão *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*, de Leonhard Euler, está indicado como referência E17; e, por um *link* de acesso via *site*, consegui acessar uma tradução para o inglês da referida obra, feita pelo Prof. Dr. Ian Bruce, em 2018 – este traduziu do alemão, ou seja, fez a tradução para o inglês diretamente do referido livro. Aliás, no texto que o Prof. Dr. Ian Bruce disponibilizou para acesso, há a tradução dos capítulos para o inglês e, no final de cada capítulo traduzido, há a cópia do texto da página em alemão, tirada diretamente de *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*.

O reconhecimento desses passos para se alcançar a tradução para o inglês me foram passados por um *e-mail* de resposta escrito pelo Prof. Christopher Golf, que participa do *site Euler's archive* e atua na Universidade do Pacífico(2). A recomendação foi observar o *site 17centurymath.com* construído pelo Prof. Dr. Ian Bruce. Era 15 de junho de 2020.

Prof. Dr. Ian Bruce mantém o *site 17centurymath.com*, onde apresenta outras obras matemáticas, não só de Euler, mas de outros matemáticos, que atuaram no século XVII e XVIII.

Para a escolha do capítulo de *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl* a se trabalhar, houve a exigência de efetuar a leitura completa da tradução em inglês, comparando-a com os esquemas da obra original (em alemão). Disso, naturalmente, necessitou-se efetuar a tradução para o português. O original em alemão foi consultado com frequência, até o término da construção do Capítulo 3 desse trabalho de dissertação, no *site DTA deutschestextarchiv.de.*

O Capítulo 7 de *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl* trouxe um significado interesse pois trata de assunto (adição e subtração de frações) obrigatório no aprendizado de Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental atual.

Surge, então, a pergunta-chave para o tema da pesquisa: “Seria o método apresentado por Euler, para o ensino básico, do estudo da adição e subtração das frações, viável nos dias de hoje?”, na reunião de 24 de junho de 2020.

Na reunião programada com a Profa. Dra. Valéria Luchetta, em 15 de julho de 2020, surgiu a seguinte questão: “Seria o prefácio da obra de autoria do próprio Euler?”, pois, segundo a Profa. Dra. Valéria Luchetta, era comum na época de Euler que o secretário do autor ou o editor escrevesse o prefácio, sem assiná-lo.

Assim, encaminhei *e-mail* para a Academia de Ciências e Humanidades de Berlim – Brandenburg, em 01 de agosto, perguntando sobre essa autoria. Em resposta, lamentaram não poderem ajudar mas indicaram quem poderia: *Georg – Eckert Institut – Leibniz* (Instituto de Pesquisa de Livros Didáticos Internacionais) e também os editores de *Mathesis & Graphe: Leonhard Euler und die Entfaltung der Wissensysteme* – livro publicado em 2010. Infelizmente, em comunicação com eles, via *e-mail*, indicaram não terem elementos para responder se o prefácio da obra é mesmo de Euler.

Em 05 de agosto do presente ano, a Profa. Dra. Valéria Luchetta mencinou que entraria em contato com Prof. Martin Mattmüller (do Instituto em Basel, Suiça), perguntando sobre a autoria do prefácio. Sua resposta me foi enviada em 17 de agosto, via *e-mail*, mencionando que nada atesta conclusivamente que o prefácio não seja de Euler, como também o contrário. Contudo, sua análise do texto indica que existe grande possibilidade (semelhança escrita e estilo) de ter sido feito pelo próprio Euler.

Em reunião com a Profa. Dra. Valéria Luchetta, 19 de agosto, surgiu a possibilidade do trabalho de pesquisa gerar dois produtos, a saber: um **livro**, correspondendo à tradução para o português da obra, com base na tradução do inglês e em comparação com o original em alemão: *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*; e a própria **dissertação de mestrado**, usando alguns capítulos da mesma obra para criação de uma sequência de trabalho (roteiro de ensino, na forma de tarefas didáticas). Os passos da dissertação de mestrado seriam: tradução do Capítulo 7 do referido livro de Leonhard Euler, escolhido por se tratar da adição e subtração de frações (tema da pesquisa), e outros capítulos necessários para a compreensão; elaboração de tarefas didáticas (ou lista de atividades ou, ainda, roteiro de tarefas para a aprendizagem), como instrumento auxiliar para se alcançar a resposta da pergunta-chave do tema da pesquisa; e, por fim, comparação da sequência indicada com aquelas apresentadas em livros didáticos usados na rede pública.

Ainda sobre o tal prefácio, em 26 de agosto de 2020, recebi o *e-mail* da Sra. Olga Kirikova, pesquisadora senior da Academia Russa de Ciências de São Petersburgo, Rússia (local onde a obra de Euler foi utilizada por quase 40 anos, como leitura obrigatória para se aprender aritmética básica), que mencinou não poder ajudar sobre a autoria do prefácio.

Em 10 de setembro de 2020, o Sr. Erik R. Tou, do *Euler's archive*, vinculado à Universidade do Pacífico, apresentou-me o depoimento do próprio Prof. Dr. Ian Bruce sobre a autoria do prefácio, apoiando a análise de Martin Mattmüller, outrora mencionado, de que, pela escrita e estilo, deve-se considerar como feita pelo próprio Euler. Apresento a tradução do depoimento do Prof. Ian Bruce:

> Um dos primeiros livros de Euler foi, ao que parece, impingido a ele, como ele descreve no prefácio. Entretanto, a maneira pela qual ele se prepara para iluminar a juventude russa da época é de um nível talvez mais avançado do que o habitual para a tiragem dos livros do tipo em aritmética. O grande amor de Euler pelos números logo se torna aparente, que ele trata como velhos amigos, e sua abordagem é essencialmente uma abordagem em que nenhum conhecimento de álgebra é assumido ou utilizado. Assim, o texto é muito verboso, mas abrangente (BRUCE, 2020, tradução livre).

Em 24 de novembro de 2020, terminei a tradução de *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl,* de Leonhard Euler, para a língua portuguesa, usando como ponte o trabalho traduzido para o inglês feito pelo Prof. Dr. Ian Bruce. Os próximos passos serão revisão ortográfica e de conteúdo para atender a criação de um dos produtos previstos e decorrentes da pesquisa, o livro.

Em reunião com a Sra. Orientadora, 09 de dezembro de 2020, decidiu-se incluir este diário de pesquisa no trabalho de dissertação de mestrado como possível capítulo introdutório, ou mesmo uma apresentação, para se alcançar os resultados da pesquisa.

Em conversa com Sra. Olga Kirikova, por correio eletrônico de 27 de janeiro de 2021, reconheceu-se o tipo de educação ministrada para o ginásio (atual ensino fundamental) na época e local onde Euler atuava. Ainda, ela trouxe o esclarecimento de que Leonhard Euler escreveu seu material para o ginásio, inicialmente em latim. Posteriormente, o reescreveu em alemão, cuja indicação bibliográfica é: *Euler L. Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl. Academiae der Wissenschaften in St. Petersburg. Th. 1. Von den speciebus mit gantzen und gebrochenen Zahlen. [SPb.]: gedruckt in der Academischen Buchdruckerey, 1738;* cuja tradução foi feita diretamente do alemão, pelo Prof. Dr Ian Bruce, para o inglês, como mencionado antes. Já o citado material, para uso na Academia, foi traduzido para o russo por Peter Inokchodtsov e Ivan Judin, estudantes da universidade na época de Euler, e publicado em 1740, cuja indicação bibliográfica é: *Эйлер. Л. Универсальная арифметика, г. Леонгарда Ейлера. Переведенная с немецкаго подлинника студентами Петром Иноходцовым и Иваном Юдиным. [Ч. 1]. СПб.: [Тип. Акад. Наук], 1740.*

Em 24 de fevereiro de 2021, remeti mais uma questão para a pesquisadora senior da Academia de Ciências de São Petersburgo, Sra. Olga Kirikova, sobre o uso de material auxiliar para o ensino da aritmética básica por Leonhard Euler. Ela me respondeu que infelizmente não há documentos ou outros registros que possam atestar o uso de material auxiliar por Euler para ensinar.

Em 29 de março do presente ano, indaguei mais uma vez a Sra. Olga Kirikova sobre o modo de ensino na época de Leonhard Euler (haja vista que se tratava do início do pensamento intelectual que vigoraria por todo o século XVIII e cujas ideias ainda são vistas e inflenciadoras até hoje: o Iluminismo).

Em 05 de abril de 2021, ela me respondeu mencionando não poder ajudar, mas me apresentou uma declaração do próprio Euler sobre um projeto educativo, que escreveu em 1737; apresento, aqui, a fala traduzida da Sra. Olga Kirikova, em resposta ao que perguntei:

> Acredito que os comerciantes (da época) sempre deveriam ter tido experiência em contabilidade e é por isso que, sem dúvida, eles usaram as frações. O próprio Euler escreveu no projeto educacional de 1737 que *cada pessoa, apesar de seu modo de vida, deveria ter tido uma necessidade real de Matemática, porque ela permite a todos distinguir qualquer coisa duvidosa da confiável, a verdade de uma mentira*. E é por isso, sublinhou ele, que todo aluno deveria ter aprendido Aritmética e Geometria: *Portanto, no Ginásio da Academia, a aritmética e a geometria devem ser ensinadas com a perfeição que o tempo reservado para o Ginásio permite*[(2)] (KIRIKOVA, 2021, tradução livre).

Tudo dito enaltece o fato de que Euler defendia uma pedagogia de esclarecimento, reveladora, que distingue a mentira da verdade; por mais importante que fossem as regras e os procedimentos para se utilizar a Matemática, o conhecimento deve ser um instrumento para esclarecer, para iluminar o estudioso, que dele necessita para exercer suas atividades. Mais do que uma aplicação de técnica, é também o estudo uma jornada ao esclarecimento!

1.1 Um pouco sobre Leonhard Euler

Leonhard Euler nasceu em 1707 na Basileia, Suíça; seu pai era ministro religioso e possuía alguns conhecimentos matemáticos, os quais procurou passar para Euler, procurando incentivá-lo aos estudos para se tornar ministro como ele.

Euler foi aluno de Johann Bernoulli I e amigo de seus filhos, Nicolaus II e Daniel Bernoulli I (da prodigiosa famíla Bernoulli de matemáticos), recebendo ampla instrução em Teologia, Medicina, Astronomia, Física, Línguas Orientais e, claro, Matemática.

Com o auxílio dos Bernoulli (Daniel Benoulli I), Euler foi chamado a atuar na Academia de Ciências de São Petersburgo (idealizada por Pedro, o Grande, monarca russo na época, influenciado pelas ideias em volga do Iluminismo; no entanto, este faleceu anos antes da inauguração da Academia).

Deve-se ter em mente que no início do século XVIII a Rússia não tinha nem cientistas ou estudantes nativos no sentido europeu de "serem educados". Os russos educados daquela época tinham uma educação religiosa tradicional que não significava estudar ciências – aquelas que trazem na sua pesquisa o método científico, como matemática, física etc. – especialmente usando os livros didáticos destas, escritos por estrangeiros e autores não ortodoxos. É por isso que, tendo decidido estabelecer a Academia de Ciências, Pedro, o Grande, a fez composta de 3 partes que

[(2)] Original em alemão daquilo que Euler sublinhou, segundo Sra. Kirikova: "*Derowegen müssten im Gymnasio bei der Academie für allen Dingen die Arithmetic und Geometrie in solcher Vollkommenheit, als die zum Gymnasio gesetzte Zeit erlaubet, tractirt werden.*"

estavam intimamente ligadas: *Ginásio*, *Universidade* e *Academia*. O *Ginásio* deveria ensinar os alunos desde o início para preparar os mais dotados a entrar na *Universidade*, onde os membros da Academia teriam dado suas palestras (foi por isso que os primeiros membros da Academia foram chamados não de acadêmicos, mas de professores: sua primeira obrigação era educar e só depois pesquisar). Assim, finalmente, ao se formarem na Universidade, os melhores alunos podiam adentrar na *Academia*, como assistentes de seus professores (ou seja, adjuntos) e, geralmente, depois como professores. Essa foi a idéia de Pedro, o Grande.

Entretanto, pela primeira vez ele teve que convidar tanto professores estrangeiros quanto coadjuvantes apenas para iniciar o processo educacional e científico na Rússia. Em 22 de janeiro de 1724, Pedro, o Grande, aprovou o projeto da Academia, num documento cujo título foi *Carta da Academia*, para fundação, que não foi legalmente confirmado de imediato pelo Senado (uma espécie de Parlamento russo daquela época); por isso que até a primeira *Carta da Academia* de fato (1747), seus membros foram regidos pelo projeto do documento escrito por Pedro, o Grande.

Em 20 de novembro de 1725, a viúva e sucessora de Pedro, Catarina I, emitiu um decreto para aprovar a criação da Academia. Um pouco mais tarde, em 14 de janeiro de 1726, foi aprovada a docência no Ginásio e na Universidade.

Em maio de 1727, aos 20 anos de idade, Leonhard Euler veio à Rússia para se tornar primeiro um *élève* (estudante da Universidade) mas, rapidamente, tornou-se um adjunto do Professor de Matemática Superior, Jacob Hermann, e desde 1733, tornou-se o próprio Professor de Matemática Superior, como nos descreve Sukhomlinov (1885) quando apresenta a fala de Müller (1730), historiador contemporâneo de Euler:

> Se Leonhard Euler, que veio para a academia no verão de 1727, também poderia ser chamado de coadjuvante, está aberto a dúvidas. Apesar de sua juventude (pois ele tinha apenas 20 anos na época), sob a orientação do grande Johannes Bernoulli, na Basileia, ele já havia chegado tão longe lá que não usava mais a instrução oral em Petersburgo. Ele também foi poupado das aulas no ginásio. Por outro lado, como outros membros reais, ele trabalhou para as assembleias acadêmicas, quero dizer nos comentários. Somente ele não recebeu o título de professor mais cedo do que outros. O Sr. Bernoulli o havia elogiado ao Presidente. Acho que ouvi dizer que ele já havia sido eleito para uma cátedra na Basileia, mas o grupo sentiu falta dele. Ele foi, portanto, nomeado e veio, sem pedir mais dinheiro do que lhe foi oferecido (isto é, 300 rublos), para participar da fundação de Pedro, o Grande, na companhia dos homens mais famosos. (MÜLLER, 1730 *apud* SUKHOMLINOV, 1885, p. 65, tradução livre).

Naquela época, Euler já havia provado ser um cientista incrivelmente talentoso. Em 27 de julho de 1730, o professor de Física Georg Bernhard Bilfinger[3] disse sobre Euler:

[3] Georg Bernhard Bilfinger (1693 — 1750) foi um filósofo, matemático e político alemão. Em 1721, tornou-se professor de filosofia em Halle an der Saale, tornando-se em 1724 professor de matemática. Em 1725 foi convidado por Pedro, o Grande, da Rússia para lecionar em São Petersburgo, onde foi bem recebido. De seus trabalhos, destacam-se *Dilucidationes*, *De harmonia animi et corporis humani commentatio* (Frankfurt e Leipzig, 1735; Tübingen, 1741); e *De origine et permissione mali* (1724). Disponível em: *https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Bernhard_Bilfinger*. Acesso em: 15 mai. 2021.

> Leonhard Euler já deu tantas amostras de sua habilidade excepcionalmente em Geometria Superior na Basileia que devido a pressão dos membros da Academia e, depois de três anos, ele pode ser considerado um dos homens mais habilidosos neste difícil e raro estudo. Por esta razão, considero-o capaz de administrar as duas disciplinas, que agora estão surgindo, a saber, '*Mathesisublimioris*' (Matemática Superior) ou '*Physicae Theoreticae et Experimentalis*' (Física Teórica e Experimental), que lhe será confiada (KIRIKOVA, 2021, tradução livre).

Tornando-se, assim, o principal matemático já aos vinte e seis anos, dedicou-se acirradamente à pesquisa, compondo uma quantidade inigualável de artigos, inclusive para a revista da Academia. Conquistou reputação internacional e recebeu menção honrosa na Academia de Ciências de Paris bem como vários prêmios em concursos.

Convidado por Frederico II, da Prússia, (época em que foi tutor de sua sobrinha), Euler passou 25 anos na Academia de Berlim, voltando só à Rússia em 1766.

Foi responsável por muitas das notações e símbolos usados até hoje na Matemática, a saber: o emprego da letra “e” como base do sistema de logaritmos naturais; a letra grega “π” para razão entre comprimento e diâmetro da circunferência; o uso do símbolo “i” para a raiz quadrada de -1 (apesar de muitos de seus trabalhos terem a representação típica do radical sobre o -1). Deve-se a ele também o uso de letras minúsculas do alfabeto para designar os lados do triângulo e as maiúsculas, para seus ângulos opostos; simbolizou “lnx” como “logaritmo natural de x” e “Σ” para indicar a ideia de somatório, além de “f(x)” para “função de x”.

Euler reuniu Cálculo Diferencial e Método dos Fluxões (idealizado por Newton) num só ramo mais geral da Matemática que é a Análise, o estudo dos processos infinitos, surgindo assim sua principal obra em 1748: *Introdução à Análise Infinita*, baseando-se fundamentalmente em funções, tanto algébricas como transcendentes elementares (trigonométrica, logarítmicas, trigonométricas-inversas e exponenciais). Disso, tratou da ideia dos logaritmos como expoentes e sobre também logarítmos de números negativos.

Muito interessado no estudo de séries infinitas, obteve notáveis resultados que o levaram a relacionar Análise com Teoria dos Números, e para Geometria, ele dedicou um apêndice na *Introdução à Análise Infinita*, onde mostra a representação da Geometria Analítica no espaço.

Em 1910 e 1913, o matemático sueco Gustav Eneström completou um levantamento abrangente das obras de Euler. Escrevendo em todos os níveis, seus trabalhos somam mais de 866 obras, dentre livros, artigos e rascunhos, onde, numa primeira análise para um projeto (hoje em andamento na Suíça, com o objetivos de publicar TODAS as obras do mestre Euler), que começou no início do século XX, estima-se que no final do século XXI, ou começo do XXII, ter-se-ão publicadas tais obras! Cada um dos trabalhos recebeu um número, de E1 a E866, que agora é conhecido como "número Eneström". A maioria dos estudiosos históricos hoje usa números de

Eneström para identificar os escritos de Euler rapidamente.

A lista completa foi publicada originalmente como *Die Schriften Eulers chronologisch nach den Jahren geordnet, in denen sie verfasst worden sind* (*Os Escritos de Euler*, ordenados pelo ano em que ele os escreveu) na edição de 1913 do *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*.

Todo esse trabalho de Euler foi resultado de sua intensa dedicação e, por que não dizer, paixão à Matemática, acompanhando-o por toda vida, até os 76 anos de idade, quando faleceu.

Leonhard Euler tinha a alcunha, dada pelos seus colegas na época: "A Encarnação da Análise".

CAPÍTULO 2: A LUCIDEZ NOS CONTEÚDOS – O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A Matemática é sem dúvida uma ação humana no intuito de promover a busca da verdade. É um esforço de muitos representantes das ciências para não só garantir uma herança cultural às próximas gerações, mas também abrir novos caminhos para elas. Ela traz um vigor, pois em si há a acomodação daquilo que se estudou no passado, se desenvolve no presente e indica caminhos a se seguir no futuro. É um vigor que, talvez, poucas ciências desfrutem, como indica Katz (2000) quando fala sobre o uso da História da Matemática no ensino, ao analisar a citação proferida por Andrew Russ Forsyth (1858 – 1942), que foi presidente da Associação Britânica para o Progresso da Ciência em 1897: “A matemática é uma das mais antigas das ciências; é também uma das mais ativas; pois sua força é o vigor da juventude perpétua”.

> Esta citação indica uma característica peculiar da matemática, que outras ciências parecem não possuir, ou pelo menos não na mesma medida, ou seja, o passado, o presente e o futuro do sujeito estão intimamente inter-relacionados, tornando a matemática uma ciência cumulativa com seu passado para sempre assimilado em seu presente e futuro (KATZ, 2000, p. 3, tradução livre).

Ao falar sobre o uso da História da Matemática no ensino, Katz exemplifica quatro procedimentos (ao que chama de ABCD do uso da História da Matemática, num esforço de mostrar a importância do uso da História no ensino e suas consequências para o aprendizado):

> Não se deixe enganar pelo título ao pensar que este artigo é um guia para o uso da história da matemática na sala de aula! As letras A, B, C, D se referem a quatro categorias, ou níveis, do uso da História da Matemática na sala de aula: A para as anedotas; B para as grandes linhas gerais; C para conteúdo e D para desenvolvimento de idéias matemáticas. Exceto para a última categoria, que descreve um curso por si só. As três primeiras categorias representam três aspectos do uso da História da Matemática. Seguindo uma boa prática no ensino, vou ilustrar cada categoria com exemplos tirados da experiência real da sala de aula, em vez de apenas explicar o que cada categoria significa em palavras. Ainda que tais exemplos são reconhecidamente fragmentados, espero que os leitores possam ainda ter uma impressão de como as quatro categorias contribuem para transmitir um senso de história no estudo da matemática de uma forma variada e multifacetada (KATZ, 2000, p. 4, tradução livre).

No procedimento A, ele a classifica como anedotas (ou historietas ligeiramente cômicas) para chamar a atenção para o assunto; como exemplo, apresenta o seguinte:

> O primeiro exemplo é uma anedota sobre o matemático alemão Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), relatada por Hans Freudenthal[(4)]. Schwarz, que foi notado por sua exatidão, iniciaria um exame oral na Universidade de Berlim como se segue:

[(4)] Hans Freudenthal (1905 – 1990) foi um matemático de origem holandesa. Fez contribuições substanciais à topologia algébrica e também teve interesse na literatura, filosofia, história e educação matemática. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Hans_Freudenthal. Acesso em: 15 mai. 2021.

> Schwarz: Diga-me a equação geral do quinto grau.
> Estudante: $x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = O$.
> Schwarz: Errado!
> Estudante: ... onde *e* não é a base dos logaritmos naturais.
> Schwarz: Errado!
> Estudante: ... onde *e* não é necessariamente a base dos logaritmos naturais.
> Esta anedota, seja ela verdadeira, semi verdadeira ou até mesmo falsa, faz um aperitivo perfeito (KATZ, 2000, p. 4, tradução livre).

Os procedimentos B e C estão relacionados com conteúdos propriamente ditos: o B menciona um conteúdo específico cujo estudo incial permite vislumbrar de maneira geral um tópico ou mesmo um curso inteiro. Num exemplo, traz a evolução histórica do estudo da curvatura das superfícies e sua medição (geometria diferencial das superfícies), apresentando o resultado devido ao matemático Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800) em 1761:

$$\oint K ds = 2\pi \tag{3.1}$$

para uma simples curva fechada C no plano, onde K é a taxa de mudança de uma curva tangente.

Apresenta, nesse exemplo, os caminhos que levaram até ao conceito de curvatura gaussiana:

> No século XVIII, o conhecimento sobre curvas espaciais permitiu aos matemáticos estudar uma superfície S no espaço, notadamente sua curvatura, através da investigação de curvas de intersecção em S por planos através da normal num ponto. Leonhard Euler (1707-1783) introduziu a noção de curvaturas principais K_1, K_2, que são os valores máximo e mínimo das curvaturas de curvas seccionais assim obtidas em um par de planos ortogonais mutuamente. O produto $K = K_1 \cdot K_2$ revela-se significativo e é conhecido como a curvatura Gaussiana, que também pode ser descrita através do "mapa de Gauss", que mede a rapidez com que a superfície se curva para longe do plano tangente medindo a "dispersão de direções" dos vetores normais unitários em todos os pontos de uma vizinhança (KATZ, 2000, p. 5, tradução livre).

O procedimento C é mais específico pois se observam conclusões a cerca de um mesmo resultado, como o estudo de funções e sua continuidade (teorema da função contínua), vistos por Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), passando pelas conclusões de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) e Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897).

E, por fim, no intuito de se destacar a importância para aprendizagem e ao ensino do uso da História da Matemática, Katz traz o procedimento D como a possibilidade de um curso, muito próximo da ideia apresentada aqui, como proposta de trabalho desta dissertação, que é "aprender um assunto com os mestres" diretamente:

> A idéia é permitir que os alunos leiam algum material primário selecionado e "aprendam com os mestres". O curso de um ano foi dividido aproximadamente em cinco seções: (1)

> Elementos de Euclides, (2) Pensamento Matemático, (3) De Pitágoras, Eudoxus, ... (Magnitudes Incomensuráveis) a Dedekind, Cantor, ... (Números Reais), (4) Geometria Não-Euclidiana, (5) Teorema da Incompletude de Gödel. As passagens foram encaixadas nestas cinco seções. Além da fonte primária, alguns dos relatos históricos gerais (denominados "Introdução" de cada capítulo) fazem uma leitura útil, a ser complementada por um texto geral. […] Por exemplo, na parte do pensamento matemático, que eu tentei deixar aos estudantes experimentarem, através dos escritos de matemáticos como Liu Hui (c. 250), Yang Hui (c. l250), Leonhard Euler (1707 – 1783), Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916), Henri Poincaré (1854 – 1912), e George Polya (1887 – 1985), apresento como os matemáticos trabalhavam (KATZ, 2000, p. 8, tradução livre).

Este testemunho, de se retomar o conhecimento da maneira como foi criado, desenvolvido, para se apresentar aos alunos, é um exemplo de como tornar o ensino e a aprendizagem mais interessante. Sentir como se originou o conhecimento, no seu início, motivos, seus desafios, sua maneira de estudar e as primeiras conclusões acerca e como seus autores a vivenciaram é apresentar uma forma de ensinar que traz bons resultados.

E vemos esses testemunhos em estudos mais recentes, como o observado no trabalho de mestrado em educação matemática desenvolvido por Feliciano (2008), ao citar Miguel e Miorim (2004), convidando à reflexão:

> [...] a história exerceria um papel motivador no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Essa afirmação nos leva a alguns questionamentos. Teriam os textos históricos, realmente, esse poder de motivar os alunos? Um tal ponto de vista acerca do papel motivador dos textos históricos poderia ou teria sido questionado por outros autores? Em caso afirmativo, com base em quais argumentos? (MIGUEL & MIORIM, 2004, p. 23 *apud* FELICIANO, 2008, p. 87).

Isso permitiu-lhe apresentar concordância nos seus resultados, quando da análise das respostas dos professores que Feliciano entrevistou e registrou no seu trabalho:

> O ponto de vista dos professores entrevistados nesta pesquisa suscita uma possível resposta a uma das perguntas feitas por Miguel & Miorim (2004), uma vez que quase a totalidade destes docentes acredita que a História da Matemática tem um papel motivador durante o processo de ensino aprendizagem. Desse modo, embora, esses autores apresentem vários argumentos que contestem essa função motivadora da História da Matemática, os professores, sujeitos mais próximos do uso efetivo da História da Matemática em sala de aula, acreditam que esse recurso possa auxiliá-los (FELICIANO, 2008, p. 87).

Podemos buscar na história subsídios, recursos e principalmente procedimentos que a permitam viabilizar a compreensão de conceitos e questões matemáticas, enquanto disciplina escolar. Não só no intuito de melhorar índices de aprendizagem nas políticas públicas (como o do IDEP), mas, primeiramente, permitir que ocorram a compreensão e o aprendizado dos temas estudados.

O reforço de tais ideias se apresenta também no trabalho de Castro (2016) na sua dissertação de mestrado profissional em Matemática que desenvolveu na Universidade Federal de Juiz de Fora (Instituto de Ciências Exatas), dentro do programa PROFMAT.

Neste trabalho, defende que o método de ensino deve perpassar pela História da Matemática, como instrumento de compreensão:

> Atualmente, a Matemática assume o papel definitivo de interpretação de seus fatos lógicos, não mais sendo apresentada como algo líquido e acabado, sendo tratada como uma ciência que transita livremente entre todas as linguagens, sendo estas entendidas como exatas ou inexatas. Assim, mais uma vez, a prática da história como compreensão dos temas numéricos se sustenta como instrumento de compreensão metodológica da Matemática em todos os níveis de ensino dentro da formação escolar do indivíduo (CASTRO, 2016, p. 19).

E como instrumento, deve ser aferida e bem regulada, para que a resolução deste seja adequada para o uso a que se destina, no caso o aprendizado. E passar pelas ideias dos mestres que criaram ou desenvolveram, originariamente, o conhecimento que, agora, está sendo ensinado, às novas gerações de estudantes, é, sem dúvida, permitir que a aferição aconteça; é a certeza de que o aprendizado se fará com interesse, motivação e com significado.

O testemunho de que a História da Matemática, no tocante como elemento motivador, aplicada no ensino, traz resultados muito positivos está também no discurso de Mendes (2017) na sua experiência, quando analisa o ensino e a aprendizagem de Matemática. Inserir um papel de investigador aos estudantes é permitir o exercício da leitura, da discussão das ideias matemáticas e da escrita; é permitir ao estudante que desenvolva autonomia, criatividade e sua cognição:

> Ao longo de minha experiência docente, percebi que usar a investigação no ensino de matemática oportuniza aos estudantes um exercício de leitura, de escrita e de discussão das ideias matemáticas, bem como suas relações com outras áreas de conhecimento. Desde as duas últimas décadas (1995 – 2005), percebo que tal exercício pode ser mais enriquecido quando, associado, inserimos aspectos históricos que envolvem a produção de conhecimento matemático no tempo, no espaço e nos contextos socioculturais em que esse conhecimento foi produzido e utilizado. Por esse motivo, considero que essa é uma das formas produtivas para se concretizar um ensino de Matemática que oportunize uma educação autônoma, criativa e ampliadora da cognição humana (MENDES, 2017, p. 2).

Na sua análise, Mendes indica, ainda, que “a História da Matemática não é apenas uma história de definições de objetos matemáticos, mas de um processo criativo que envolve sociedade, cultura e cognição” (2017, p. 4), o que torna sua importância ainda mais relevante no processo de ensino, pois criatividade, desenvolvimento cultural e incrementação cognitiva são aspectos da sociedade necessários para se alcançar um futuro melhor a todos.

O uso da história traz mais significado ao estudo da Matemática pois reforça o fato de ser uma construção sociocultural:

> Reiteramos, portanto, que a Matemática a qual nos referimos é, na verdade, a cultura matemática, ou seja, a Matemática construída socioculturalmente. Trata-se de uma cultura de práticas pensadas, experimentadas e refletidas socialmente e que consequentemente fazem emergir modelos explicativos de tais matemáticas dentre os quais os modelos que se incorporam às matemáticas acadêmicas e que são transportadas para o sistema educacional (MENDES, 2017, p. 7).

E nessa construção social, o papel do professor se torna mais uma vez imprescindível na escolha dos temas e dos assuntos a se tratar, aqueles da história, que, de fato, vão produzir o efeito desejado: a plena aprendizagem. Essa objetividade é destacada por Mendes:

> Cabe ao professor pensar cuidadosamente sobre para o que e para quem é essa história da matemática. Em nosso modo de pensar e agir na formação de professores de matemática, a história que compreendemos como importante para o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos alunos em sala de aula é uma história que tem a vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço (MENDES, 2017, p. 10).

E nos cursos de formação de docentes, há a necessidade, portanto, de se incluir disciplinas que permitam ao estudante, de graduação ou pós-graduação, desenvolver-se como pesquisador: ensinar-lhe a atitude profissional de educador, o modelo de ação pedagógica que permita criar as conexões didáticas e epistemológicas para os tópicos de matemática que serão apresentados na Educação Básica. Esse modelo de ação pedagógica deve trazer a investigação histórica do conhecimento matemático como um dos pontos importantes a desenvolver atitudes e hábitos de investigação do contexto sócio-histórico e cultural, a fim de se contribuir para a formação de um profissional mais comprometido com a qualidade do trabalho.

Com isso, se permitirá desenvolver um "diálogo entre os conteúdos escolares abordados nas salas de aula e as práticas socioculturais e científicas estabelecidas no passado e no presente, na forma de um processo de estímulo ao exercício de criatividade matemática" (MENDES, 2017, p. 17).

O professor de Matemática, como profissional da Educação, deve ter evidentemente o conhecimento daquilo com o qual trabalha – mesmo que aquilo não esteja totalmente sabido ou recordado, no momento, dado o amplo repertório que a Matemática possui, que ele saiba como buscar esclarecimento ou recordação. Que deva traçar estratégias para se alcançar um objetivo de aprendizagem no ensino, que deva saber qual ponto merece destaque, dada sua clientela estudantil, que deva saber organizar o tempo, dividi-lo em momentos para se alcançar o que deseja, tudo isso enfim, tem uma grande importância no processo de ensino e aprendizagem. Concordamos com tudo isso e mais com o que D'Ambrósio (1999) menciona:

> Ninguém contestará que o professor de matemática deve ter conhecimento de sua disciplina. Mas a transmissão desse conhecimento através do ensino depende de sua compreensão de como esse conhecimento se originou, de quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões de sua presença nos currículos escolares. Destacar esses fatos é um dos principais objetivos da História da Matemática (D'AMBRÓSIO, 1999, p. 21).

O professor é crítico ao entender o que se objetiva com as políticas públicas de ensino: o que se deseja passar aos estudantes, o que é de direito ao aluno saber a cerca do conhecimento que a humanidade já produziu e, também, quais são as origens de tal conhecimento. Estas são questões que acreditamos terem como resposta: *tudo que for possível passar no tempo da hora-aula ou no tempo em que o estudante possa usar para aprender!*

A História da Matemática traz para D'Ambrósio finalidades bem claras no seu estudo que, pela sua importância, seriam os pontos 1, 2, 3 e 4 constituintes da essência de um programa de curso; poderíamos mesmo dizer de um currículo, de História da Matemática:

> 1. para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
> 2. para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
> 3. para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antigüidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
> 4. para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em conseqüência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as conseqüências sócio-culturais dessa incorporação (D'AMBRÓSIO, 1999, p. 27).

As finalidades apresentadas por D'Ambrósio falam por si da importância em se considerar como excelente instrumento de ensino a História da Matemática para a Matemática. Ela a completa no que diz respeito ao assunto matemático apresentado e estudado nos currículos escolares hoje: o conhecimento referente ao usado na tecnologia, àquele advindo da contribuição de diferentes povos e àqueles formadores da cultura ocidental atual.

E o professor, profissional de Educação, deve reconhecer os caminhos a se seguir, para ensinar, desde sua formação. Ter em mente quais são as necessidades a se satisfazerem para se alcançar um determinado objetivo no, então, processo de ensino e aprendizagem. Essa lucidez nos conteúdos é fundamental para tornar o conhecimento, não só o de Matemática, útil e reconhecidamente necessário.

Vejamos o exemplo dado por Lins (2005), quando fala sobre os cursos de Licenciatura e comenta a lucidez necessária ao professor, refletindo sobre Euler:

> Mas Euler não sabia nada de análise, não sabia nada de estrutura, nem algébricas, nem outras (grupo, anel, corpo, ordem, topologia...) não sabia nada de representação geométrica ou sobre pares ordenados de números complexos, nem de cortes nem de nada disso, inclusive geometrias não-euclidianas, simplesmente porque estas coisas não existiam em sua época. […] Penso que o que importa mesmo, no caso de Euler, é que ele era fluente – lúcido, como costumo dizer – matematicamente, bom resolvedor de problemas e bom aplicador da Matemática. Ele não tinha os "verdadeiros fundamentos", mas tinha lucidez e tinha um domínio adequado, para dizer o mínimo – da Matemática elementar (segundo nossos parâmetros) (LINS, 2005, p. 120).

De fato, ao professor cabe gerir sobre seu trabalho: traçar novas estratégias que a sua lucidez exige utilizar. E, como na contra mão da ideia corrente de riqueza (de que se é mais rico quem possui mais objetos, coisas), ensinar mais conteúdos significa ter mais lucidez sobre os mesmos, observando novas estratégias:

> Desde o tempo de minha graduação, defendo que o professor precisa saber mais, e não menos Matemática, mas sempre esclarecendo que este *mais* não se refere a mais conteúdo, e sim a um entendimento, uma *lucidez* maior, e isto inclui, necessariamente, a compreensão de que mesmo dentro da Matemática do matemático produzimos significados diferentes para o que parece ser a mesma coisa. E sempre defendi, também, que muitas das dificuldades que nossos alunos enfrentam são criadas por nós mesmos, por exemplo ao sonegarmos a eles o acesso, cedo na vida, a certas ideias. (LINS, 2005, p. 122).

Portanto, nós professores devemos obrigatoriamente, como responsáveis em sempre buscar a verdade das coisas, para nossos alunos, trazer novas formas de ensinar, mesmo que seja retomar outras antigas pela eficiência.

Vejamos um exemplo de atividade de ensino onde o uso da História da Matemática se faz da maneira, aqui, defendida: estudar como os mestres ensinaram (fonte) e como se estudava na época: não se deseja, entretanto, se trajar como na época, usar caneta tinteiro, tabletas de barro ou um bastão de madeira em forma de cunha (o que também não seria de todo desinteressante), mas sim observar as dificuldades e as vantagens de se estudar, como na época, um assunto escolhido.

Observemos a proposta pedagógica de Oliveira (2020):

> Neste trabalho, apresentamos uma proposta de atividade a ser desenvolvida com alunos do sexto ano do ensino fundamental como forma de trabalhar o algoritmo da multiplicação. Contudo, a atividade aqui proposta pode ser desenvolvida já desde o quarto ano, desde que o docente faça algumas alterações para o público desejado. A atividade proposta tem como um de seus objetivos a confecção das barras de calcular de John Napier (1550 – 1617), importante matemático do século XVII (OLIVEIRA, 2020, p. 98).

Para tanto, inicialmente, Oliveira apresenta uma breve biografia sobre John Napier (1550 – 1617), mencionando seus trabalhos e algumas curiosidades sobre sua vida, como ativista religioso e a sua fama por desenvolver o estudo dos logaritmos:

> Em matemática, Napier é conhecido pelo desenvolvimento dos logaritmos e da difusão do ponto decimal. Os logaritmos foram inicialmente nomeados como "números naturais", mas ele mesmo mudaria o nome combinando os termos gregos *logos* (que tem como um dos possíveis significados o de proporção) e *arithmos* (números) (HAVIL, 2014 *apud* OLIVEIRA, 2020, p. 98).

Em seguida, apresenta a fonte bibliografia da construção das barras de calcular ao citar a obra *Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo* (1617), publicada por John Napier. Nela indica algumas curiosidades e detalhes, como o termo *rabdologia*, que poderia ser traduzido como o estudo das varas ou de barras, entendendo que o título do livro, em português seria *Estudo das barras ou cálculo através de varas em dois livros*.

Indica também a justificativa dada por John Napier para a publicação da obra, apresentando um trecho traduzido do prefácio do livro, o que permite apresentar a opinião do mestre sobre seu trabalho em primeira mão:

> Eu tinha duas razões para fazer o meu livro sobre a fabricação e uso das barras de calcular, disponíveis ao público. A primeira foi a de que as barras foram bem aceitas por tantas pessoas que quase se podia dizer que já eram de uso comum, tanto na Escócia, como no exterior. A outra razão foi o fato de terem chamado a minha atenção e que gentilmente me aconselhou a publicá-lo, para que não fosse publicado sob o nome de outra pessoa (NAPIER, 1617, f. 3, *apud* OLIVEIRA, 2020, p.100).

Em seguida, indica os materiais a se utilizar e os procedimentos, etapas, da atividade (apesar de sugerir o uso de um projetor para, com os *slides*, apresentar as imagens aos estudantes, coisa que não havia na época de Napier, entendemos isso como uma maneira de se ganhar mais tempo para se alcançar a meta proposta, haja vista que o professor, atualmente, não dispõe de muito tempo de aula, principalmente na rede pública).

No seu roteiro de ação, indicou em aulas as etapas do processo para confeccionar e utilizar as barras: na primeira aula, sugere a apresentação dos aspectos históricos da época e os instrumentos usados para agilizar os cálculos (ábaco ou soroban); na segunda aula, começa-se a construção efetiva das barras, apresentando um exemplo; na terceira aula, indicou a utilização das barras, por meio de tarefas didáticas, inicialmente simples até chegar em cálculos mais complexos – o uso de materiais foi aquele contemporâneo de Napier (cola, papel e palitos de madeira); na quarta e quinta aulas, sugeriu avançar os cálculos para fatores com três algarismos, instigando os alunos à investigação e à descoberta.

Na sexta aula, Oliveira sugere que o professor apresente a explicação do método de cálculo utilizado:

> Nesta aula, o professor deve apresentar para os alunos o método no qual Napier se baseou para a realização das barras. As barras desenvolvidas por Napier são parecidas com um método de multiplicação conhecido como “gelosia”, mesmo não tendo comprovação que elas são um aperfeiçoamento deste. Gelosia é uma palavra cujo significado nos remete às ripas que se colocam nas janelas ou portas de madeira para proteger da luz ou do calor e que, através delas, se pode observar a parte externa sem ser visto. Porém, em matemática, gelosia é uma técnica de multiplicação que tem sua origem na Índia e que foi difundida pelos árabes (MÉTIN, 2018, *apud* OLIVEIRA, 2020, p. 107).

Aqui temos o momento da conclusão da aprendizagem, ao se apresentar um método de cálculo para uma operação, a princípio trivial, mas que traz uma informação importante: possui uma outra maneira de se fazer e que, em tempos passados, era comum seu processo e de boa compreensão.

Por fim, Oliveira sugere estratégias de avaliação e comenta que os professores ficam maravilhados com a simplicidade na construção de tal ferramenta antiga e, também, com a precisão dos resultados:

> A proposta de utilização das barras de calcular, em diferentes públicos, sempre resulta um impacto semelhante: os participantes dos minicursos ou oficinas ficam maravilhados percebendo como um material tão simples – tanto no que diz respeito aos aspectos matemáticos, como em relação à confecção dos mesmos – pode agilizar os cálculos da multiplicação e, praticamente, sem produzir erros. Essa motivação é benéfica para os alunos em processo inicial de aprendizagem ao gerar confiança para realizar as operações aritméticas (OLIVEIRA, 2020, p. 108).

Esse exemplo de prática de ensino, apresentando métodos de estudo ou de cálculos observados na História da Matemática, ratifica a importância no aprendizado. Essa prática se justifica por si mesmo até, pois trazer motivação ao estudo é só um dos aspectos da curiosidade humana; o que se consegue além é o entendimento mais profundo do uso de métodos de cálculo, no caso, e o reconhecimento da importância social que o procedimento tinha, dado o exemplo na história.

Por tudo o que foi dito antes e o exemplo apresentado, entendemos que não há mais dúvidas de que o ensino da Matemática, aliado ao estudo da História da Matemática, traz vantagens e conhecimentos mais profundos sobre temas outrora já conhecidos.

E o uso de ferramentes ou processos antigos de cálculo, por exemplo, pode ser melhor do que se tem utilizado hoje, haja vista a precisão nos resultados e a eficiência.

A conclusão parcial aqui é que a lucidez se faz mais aprofundadamente, pois os conteúdos vistos trazem mais a ofertar do que antes se imaginava ter; ou seja, o conhecimento não é estanque, parado, principalmente o matemático, mas vivo, dinâmico e envolvente – como muitos dos defensores da História da Matemática, aqui, comentados, defendem.

E vivenciar os métodos antigos, os assuntos estudados à maneira da época, é reviver, é retomar a emoção da descoberta, é sentir a curiosidade mais intensamente. E o uso apenas ilustrativo da História da Matemática pode ser uma aperitivo, como Katz (2000) mencionou, mas o prato principal está na retomada da maneira e de como se estudava na época dos mestres.

E a sobremesa, no final, é o alcance da total aprendizagem, meta do docente.

CAPÍTULO 3: O MÉTODO DE EULER (1738) – ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES.

Em face daquilo que foi apresentado no Capítulo 2, vemos que a importância em se conhecer novos métodos de ensino (mesmo que seja a retomada de modelos antigos, por sua significativa eficiência) possui grande significado, haja vista tudo o que foi dito e que apoia o ensino de História da Matemática a complementar o de Matemática.

Apresento, agora, a método desenvolvido por Leonhard Euler, em seu livro *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*, publicado em 1738 – já mencionado, no tocante ao seu trabalho sobre adição e subtração de frações.

Figura 3.1 – Capa de apresentação de *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*, de Leonhard Euler e ficha técnica.

Euler, Leonhard: Einleitung zur Rechen-Kunst. Bd. 1. St. Petersburg, 1738.

BIBLIOGRAPHISCHE ANGABEN

URN:	urn:nbn:de:kobv:b4-200905198847
Titel:	Einleitung zur Rechen-Kunst
Untertitel:	Zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschafften in St. Petersburg
Autor/in:	Leonhard Euler (GND, Wikipedia, ADB/NDB)
Erscheinungsjahr:	1738
Verlag/Drucker:	Academische Buchdruckerey
Ort:	St. Petersburg
Band:	Erster Theil von den Speciebvs mit gantzen und gebrochenen Zahlen (Bd. 1 von 2)
Auflage:	1. Auflage
Bibliothek:	SUB Göttingen
Signatur:	8 MATH II, 1871:1

ZUGEHÖRIGE WERKE

Fonte: DTA deutschestextarchiv.de

Nesse trabalho, que trata do estudo inicial das operações aritméticas elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como das operações com fração – racionais positivos) dividido em dois volumes (sendo o segundo volume, publicado em 1740, dedicado à apresentação de tabelas de conversão de unidades e operações com grandezas), busca-se, no volume 1, esclarecer como operar as frações, adicionando-as ou subtraindo-as.

A proposta, aqui, é de se estudar lendo a obra do mestre, o primeiro volume, observando o Capítulo 5 (sobre a divisão), o Capítulo 6 (sobre o conceito de fração) – estes dois necessários para se compreender o próximo capítulo – e o Capítulo 7 (que aborda, propriamente, a adição e a subtração de frações). Esse volume foi traduzido para nossa língua por mim, dada a grande importância do assunto para a continuidade do estudo em Matemática, não só para aqueles que desejam prosseguir em seus estudos ou serem profissionais na área, dita, de Exatas, mas também, parafraseando Euler, em seu, então, projeto educacional, quando começou a lecionar na Academia de Ciência de São Petersburgo – relatado para mim pela Sra. Olga Kirikova, pesquisadora senior: *para todos aqueles que necessitam da Matemática para separar a dúvida da certeza ou a verdade da mentira, seja como ferramenta, seja outrora como iluminação pura!*

Antes, porém, faz-se necessário destacar que havia uma clara distinção, em alemão, do significado de número. Muitas vezes, a ideia de número, especificamente usado como quantidade (o inteiro, por exemplo), era dito A*nzahl*, como podemos perceber claramente no ínicio do prefácio do livro de Euler (1738), cujo título já fora apresentado (vejamos, como citação e depois a referida tradução):

> Die **Anzahl** der Rechenbücher, welche sowohl in Deutschland als anderwärts herausgegeben worden, ist so gross und überhäuft, dass manchem diese Arbeit höchst unnöthig und überflüssig scheinen möchte. Allein da auf Allergnädigsten Kaiserlichen Befehl die Russische Jugend sowohl in der Arithmetik als Geometrie auf das fleissigste unterrichtet werden soll, so ereigneten sich sehr grosse Schwierigkeiten, wann man sich zu diesem Ende anderwärts gedruckter Anleitungen bedienen wollte (EULER, 1738, prefácio).

> O **número** de livros de aritmética que foram publicados tanto na Alemanha como em outros lugares é tão grande e transbordante que para alguns este trabalho pareceria altamente desnecessário e supérfluo. Entretanto, como a juventude russa deve ser instruída em aritmética, bem como em geometria da maneira mais diligente pela Graciosíssima Ordem Imperial, grandes dificuldades surgirão se alguém quiser fazer uso de instruções impressas em outro lugar para este fim (EULER, 1738, prefácio, tradução livre).

Já a ideia geral, abstrata, de número, muitas vezes aquela para representar generalizações, era dita Z*ahl*, e seu plural é Z*ahlen*, como podemos perceber em mais um trecho do mesmo livro de Euler (1738):

> Um dieser Ursachen willen hat man in gegenwärtiger Abhandlung die arithmetischen Regeln und Operationen aus der Natur der **Zahlen** selbst und der Beschaffenheit der gebräuchlichen Charactere so hergeleitet, dass ein jeder auch ohne besondere Anführung sowohl die Operationen begreifen und darinn eine Fertigkeit erlangen, als auch den Grund davon verstehen kann (EULER, 1738, prefácio).

> Por estas causas, no presente tratado as regras e operações aritméticas foram derivadas da natureza dos próprios **números** e da natureza dos caracteres comuns em uso de tal forma que qualquer pessoa, mesmo sem instruções especiais, pode tanto compreender as operações como adquirir habilidade nelas, e entender a razão para elas (EULER, 1738, prefácio, tradução livre).

Essa particular distinção de número, que se faz notar na língua alemã, traduz um sofisticado grau de precisão.

É igualmente interessante notar, ainda, que o século XVIII foi palco do início das ideias iluministas na filosofia e na pedagogia, por toda Europa.

Monarcas da época se sentiram atraídos pelos novos ideais, principalmente por que questionavam o poder da Igreja Cristã e seu controle:

> Para os iluministas, a igreja católica ensinava uma filosofia ultrapassada, a Escolástica, e tornava os homens ignorantes, fanáticos e submissos. Nesse sentido, os pensadores iluministas propunham um tipo diferente de educação, que colocasse a razão e a capacidade de pensar como valores fundamentais. Logo, a racionalidade seria a grande luz a combater as trevas do obscurantismo da igreja católica (SCHMIDT, 1996 *apud* SANTOS, 2013, p. 8).

Nesse sentido, os monarcas da época apoiaram a criação de novas instituições de ensino, que deveriam ser controladas pelo Estado e não mais pela Igreja:

> No contexto histórico do Iluminismo, não fazia mais sentido atrelar a educação à religião, como nas escolas confessionais, nem aos interesses de uma classe social, como queria a aristocracia. A escola deveria ser laica e livre, ou seja, não religiosa e independente de privilégios de classe (SANTOS, 2013, p. 8).

Todo esse incipiente movimento motivou pesquisadores e cientistas também, e Leonhard Euler não ficou de fora e, como foi mencionado antes, dedicou sua vida à produção de conteúdo científico, tornando-se um dos mais destacados matemáticos e cientistas até hoje!

E aqui, nesse trabalho de dissertação, inédita em português, apresento seu método para o ensino da adição e subtração de frações para a Educação Básica,

Ainda cabe destacar que, visando seguir a presente proposta de trabalho no estudo de adição e subtração de frações, seguindo seu método, nos originais, à maneira da época, este não obriga o uso de materiais auxiliares (como material dourado ou afins), conforme informação de que “não há registro documental de que Euler utilizasse material extra para ensinar com seu livro-texto” (KIRIKOVA, 2021, tradução livre).

3.1 Adição e subtração de frações – uso do método de Leonhard Euler (1738)

Neste momento, apresento o método de ensino referido no formato de tarefas didáticas, cujo procedimento para aplicação segue a maneira da época de Euler: leitura da regra, apresentação de exemplos e convite ao estudante a resolver alguns exercícios; no final de cada capítulo, apresentam-se mais exemplos, que utilizam todas as regras apresentadas nos tópicos (entre aspas e em itálico está a tradução da regra do inglês e o trecho original em alemão está indicado na nota de rodapé – entre parênteses, está a indicação da página, no original). Em itálico, e somente quando convier, está o comentário do mestre Euler sobre o que se está apresentando.

O material se destina aos estudantes da Educação Básica (6º ano do ensino fundamental, hoje), bem como para aperfeiçoamento, ou até mesmo, a curso de extensão, para docentes, que desejam conhecer o trabalho nesta área de ensino do mestre Leonhard Euler.

Cada parte apresentada a seguir representa um capítulo do livro fonte. Estes estão sudivididos em tópicos. Cada tópico pode ser trabalhado numa aula, inicialmente, mas dependendo do grupo de estudantes, pode-se estender para mais de uma. Pressupõe-se também conhecidas as operações de adição, subtração e multiplicação dos números naturais.

Nota: os exemplos ou exercícios apresentados aqui advém do livro fonte, podendo ter um exemplo extra ou mais, criado por mim, para completar o padrão mínimo de apresentação de três exemplos em cada tópico – a indicação por asterisco *(*)*, refere-se a exemplo ou exercício criado, que não aparece no texto original (livro fonte: *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl (1738)*, de Leonhard Euler), além de comentários ou explicações.

3. 1. 1. Tarefas didáticas

Objetivo: adição e subtração de frações

Parte 1: a divisão como a quarta operação aritmética

1. *Euler: "É ensinado em divisão, como devemos encontrar um número, que indica, quantas vezes um determinado número está contido noutro. Ou a divisão ensina, como podemos dividir um dado número em tantas partes iguais, como desejamos, e também mostra ao mesmo tempo o tamanho de cada uma dessas partes[5]".*

Assim como a multiplicação surgiu da adição, onde os números que devem ser adicionados são iguais entre si: assim a divisão surgiu da subtração. Então, se perguntarmos quantas vezes um

[5] In der Division wird gelehret, wie man eine Zahl finden soll, welche anzeigt, wie viel mal eine gegebene Zahl in einer andren gegebenen Zahl enthalten sei. Oder die Division lehret, wie man eine gegebene Zahl [in] so viel gleiche Theile zertheilen soll, als man verlangt, und zeiget auch zugleich die Grösse eines solchen Theils. (pp. 106 - 107)

número está contido em outro número, devemos agora procurar quantas vezes podemos retirar o mesmo número daquele que sobrou. A divisão, portanto, nada mais é do que uma subtração repetida, uma vez que sempre retiramos o mesmo número daquele número dado. A divisão é, portanto, nada mais do que uma subtração repetida.

Veja o exemplo: quantas vezes o 18 está contido em 72?

$$
\begin{array}{rr}
 & 72 \\
1. & \underline{18} \\
 & 54 \\
2. & \underline{18} \\
 & 36 \\
3. & \underline{18} \\
 & 18 \\
4. & \underline{18} \\
 & 0
\end{array}
$$

Resp.: É encontrado 4 vezes!

[...] Agora, enquanto 18 é considerado estando quatro vezes em 72, segue-se que quatro vezes 18 deve resultar em 72, o que também é confirmado pela multiplicação. De maneira semelhante, vemos também que se 72 devem ser divididos em 18 partes iguais, que em cada parte deve haver 4, enquanto 4 tomadas dezoito vezes equivalem a 72. Acontece assim que as duas descrições dadas concordam entre si, em que um número tomado tantas vezes pelo outro, contém tantas partes, como se o número original fosse dividido em tantas partes iguais, como o outro número indica.

Tarefa nº 1. Quantas vezes:

- o 12 é encontrado em 180?
- o 15 é encontrado em 120? *(*)*
- o 17 é encontrado em 187? (*)

2. *Euler: "Quando um número é dividido por outro número, ou se perguntarmos, quantas vezes este número contém o outro; assim esse mesmo número que pode ser dividido pelo*

outro é chamado de dividendo, ou para o qual a pergunta é, quantas vezes o mesmo contém o outro; enquanto o outro número, pelo qual o dividendo será dividido, é chamado de divisor. Mas o número procurado e que deve indicar, quantas vezes o divisor está contido no dividendo, é geralmente chamado de quotus ou quociente[6]*”.*

Em qualquer exemplo de divisão são dados dois números, o dividendo e o divisor, e a questão é <u>quantas vezes</u> o divisor está no dividendo. Uma vez que, agora, o <u>quotus</u> ou o quociente disso é determinado, então o mesmo é o número que é procurado [...].

Vamos indicar quem é o dividendo, o divisor e o quociente. Para tanto, vamos fazer as subtrações, com repetição do subtraendo (tirá-lo até a exaustão). Veja o exemplo: quantas pessoas podem receber a soma de 144 rublos (nome de unidade monetária em russo) de uma herança de 1728 rublos?

1728	1008	288
1. 144	6. 144	11. 144
1584	864	144
2. 144	7. 144	12. 144
1440	720	0
3. 144	8. 144	
1296	576	
4. 144	9. 144	
1152	432	
5. 144	10. 144	
1008	288	

Resp.: São 12 pessoas que podem receber 144 rublos:

- dividendo: 1728;
- divisor: 144;
- quociente: 12.

---

[6] *Wann eine Zahl durch eine andre dividirt werden soll, oder wann man fragt. wie viel mal eine Zahl die andre in sich enthalte; so wird dieselbe Zahl, welche durch die andre dividirt werden soll, oder von welcher die Frage ist, wie viel mal dieselbe die andre in sich enthalte, der Dividendus genannt, die andre Zahl aber, durch welche dieselbe dividirt werden soll, wird der Divisor genannt. Diejenige Zahl aber, welche gesucht wird und anzeigen soll, wie viel mal der Divisor im Dividendo enthalten sei, pflegt der Quotus oder der Quotient genannt zu werden. (p. 110)*

Tarefa nº 2. Quantas pessoas podem receber a soma de:

- 102 rublos de uma herança de 1530 rublos? *(*)*
- 123 rublos de uma herança de 984 rublos? *(*)*
- 205 rublos de uma herança de 1435 rublos? *(*)*

3. *Euler: "Mas é bom notar, que nem todo o número pode ser dividido por qualquer número, mas o dividendo deve ser tal número, que na realidade surge da multiplicação do divisor por algum outro número. Mas se o dividendo não for dessa natureza, de modo que não podemos atribuir números inteiros pelos quais podemos tratar tudo de uma só vez, o quanto o divisor está realmente contido no dividendo. Nesses casos, devemos nos contentar em fornecer o menor número mais próximo para o quociente, mas por meio do qual devemos observar, quanto resta do dividendo, pelo qual o divisor não está mais contido. E esse número restante, assim decorrente dessa divisão, também é geralmente chamado de resto[7]".*

Nota: o quanto resta do dividendo, do qual não se pode mais tirar o divisor, é chamado resto. Ainda: o mais próximo do "verdadeiro quociente" significa que este valor é tal que ao multiplicar o divisor por ele resulta-se um valor *menor* que o dividendo; o consecutivo do quociente, resultaria num valor maior!

Veja o exemplo: indique o quociente e o resto, após tirar 12 de 101 até a exaustão.

	101		77		53		29	
1.	12	3.	12	5.	12	7.	12	
	89		65		41		17	
2.	12	4.	12	6.	12	8.	12	
	77		53		29		5	← resto

Resp.: O quociente é 8; o resto, 5.

---

[7] *Es ist aber wohl zu merken, dass nicht eine Jede Zahl durch eine jede dividirt werden könne, sondern der Dividendus muss eine solche Zahl sein, welche wirklich durch die Multiplication des Divisoris mit einer anderen Zahl entspringen kann. Ist aber der Dividendus nicht so beschaffen, so kann man mit ganzen Zahlen, davon wir anjetzo allein handeln, nicht anzeigen, wie viel mal der Divisor eigentlich in dem Dividendo begriffen sei. In solchem Fall muss man sich also begnügen, die nächste kleinere Zahl anzugeben für den Quotum, wobei man aber bemerken muss, wieviel noch zurückbleibe von dem Dividendo, darinn der Divisor nicht mehr enthalten. Und dieses was zurückbleibt, pflegt auch der Rest genennet zu werden, so aus einer solchen Division entspringt. (p. 112)*

Tarefa nº 3. Indique o quociente e o resto após tirar:

- 16 de 212 até a exaustão. *(*)*
- 17 de 193 até a exaustão. *(*)*
- 19 de 288 até a exaustão. *(*)*

4. *Euler: "Para compreender e utilizar as seguintes regras, com a ajuda das quais todos os exemplos de divisão podem ser calculados, é necessário, acima de tudo, que todos os casos em que o divisor é menor do que dez, e também menor do que dez vezes no dividendo, já possam ser calculados mentalmente, e, tanto o quociente como o resto, se ainda houver um para calcular. Para o qual, do mesmo modo, as instruções necessárias serão dadas aqui[(8)]".*

Tarefa nº 4. Vamos completar a tabela mnemônica (ou para consulta) – tabela para a divisão.

2 está contido em 2, 1 vez.	3 está contido em 3, vez.	4 está contido em 4, vez.
2 está contido em 4, vezes.	3 está contido em 6, 2 vezes.	4 está contido em 8, vezes.
2 está contido em 6, vezes.	3 está contido em 9, vezes.	4 está contido em 12, 3 vezes.
2 está contido em 8, 4 vezes.	3 está contido em 12, vezes.	4 está contido em 16, vezes.
2 está contido em 10, vezes.	3 está contido em 15, 5 vezes.	4 está contido em 20, vezes.
2 está contido em 12, vezes.	3 está contido em 18, vezes.	4 está contido em, 6 vezes.
2 está contido em 14, vezes.	3 está contido em 21, vezes.	4 está contido em 28, vezes.
2 está contido em 16, vezes.	3 está contido em 24, vezes.	4 está contido em 32, vezes.
2 está contido em 18, vezes.	3 está contido em 27, vezes.	4 está contido em 36, vezes.

5 está contido em 5, vez.	6 está contido em 6, vez.	7 está contido em 7, vez.
5 está contido em 10, vezes.	6 está contido em 12, vezes.	7 está contido em 14, vezes.
5 está contido em 15, vezes.	6 está contido em 18, vezes.	7 está contido em 21, vezes.
5 está contido em 20, 4 vezes.	6 está contido em 24, vezes.	7 está contido em 28, vezes.
5 está contido em 25, vezes.	6 está contido em 30, 5 vezes.	7 está contido em 35, vezes.
5 está contido em 30, vezes.	6 está contido em 36, vezes.	7 está contido em 42, 6 vezes.
5 está contido em 35, 7 vezes.	6 está contido em 42, vezes.	7 está contido em 49, vezes.
5 está contido em 40, vezes.	6 está contido em 48, 8 vezes.	7 está contido em 56, vezes.
5 está contido em 45, vezes.	6 está contido em 54, vezes.	7 está contido em 63, 9 vezes.

[(8)] *Um die folgenden Regeln, durch deren Hülfe alle Exempel der Division ausgerechnet werden können, zu begreifen und dieselben auch zu gebrauchen, so ist vor allen Dingen nöthig, dass man alle diejenigen Exempel, in welchen der Divisor kleiner ist als 10, und auch weniger als 10 mal in dem Dividendo enthalten ist, schon wisse im Kopf auszurechnen, und sowohl den Quotum als auch den Rest, wann einer übrig bleibt, anzuzeigen. Wozu gleichwohl allhier die nöthige Anleitung gegeben werden wird. (pp. 115 - 116)*

8 está contido em 8, 1 vez.	9 está contido em 9, vez.
8 está contido em 16, vezes.	9 está contido em 18, 2 vezes.
8 está contido em24, vezes.	9 está contido em 27, vezes.
8 está contido em 32, vezes.	9 está contido em 36, vezes.
8 está contido em 40, vezes.	9 está contido em 45, vezes.
8 está contido em 48, vezes.	9 está contido em 54, vezes.
8 está contido em 56, 7 vezes.	9 está contido em 63, vezes.
8 está contido em 64, vezes.	9 está contido em 72, 8 vezes.
8 está contido em 72, vezes.	9 está contido em 81, vezes.

Assim, vemos nesta tabela todos os casos em que tanto o divisor como o quociente são números simples ou que são menores do que dez. E qualquer pessoa que aprendeu bem esta tabela, pode dizer que o verdadeiro quociente para cada caso simples que surge está presente nesta tabela. [...] No entanto deixamos de fora os casos nesta tabela, em que o divisor é 1. Então o 1 está contido em qualquer número quantas vezes o mesmo número indicar. Isto é, se o divisor for 1, então o quociente é sempre igual ao dividendo.Você pode ver isso na multiplicação; então, enquanto o quociente multiplicado pelo divisor deve produzir o dividendo, é claro que quando o divisor é 1, o quociente deve ser igual ao dividendo. Assim, é costume a dizer que não se divide, porque o dividendo indica o próprio quociente! Além disso, é evidente, também, que se o divisor for igual ao dividendo, o quociente deve ser sempre 1, pois qualquer número está contido em si mesmo uma vez. Finalmente, deve ser observado também que se o divisor for zero, o quociente será infinitamente grande; mas porque este caso não ocorre na divisão comum, não é necessário explicar algo do infinito a um principiante.

Ainda: para as próximas tarefas, por exemplo, "dividir 101 por 12" significa "tirar 12 de 101 até a exaustão".

Vejamos o exemplo: consultando a tabela, vamos indicar o quociente e o resto ao dividir 38 por 7: na tabela do 7, o valor mais próximo, e menor, de 38 é 35 (quociente é 5); ou seja, 7 está contido em 35, 5 vezes; então:

$$\begin{array}{r} 38 \\ \underline{35} \\ 3 \end{array}$$

Resp.: Ao dividir 38 por 7, obtém-se quociente 5 e resto 3. Vemos, então, que a tabela permite encontrar mais rapidamente o quociente.

Tarefa nº 5. Indique o quociente e o resto ao dividir:

- 49 por 5. *(*)*
- 59 por 8.
- 87 por 9.

5. *Euler: "O que foi dito acima sobre a divisão com um divisor simples, deve ser compreendido igualmente por unidades. Ou seja, se o dividendo e o divisor são representados por unidades, também o são os números a serem indicados por unidades, que surgem para o quociente e o resto. Mas se agora o divisor é expresso em unidades, mas o dividendo a ser expresso em dezenas ou centenas ou milhares, etc então devem também os números, que serão encontrados para o quociente e o resto, dos mesmos tipos, devem ser entendidos, ou seja, em dezenas, centenas, milhares, etc[9]".*

Observe o exemplo e vamos indicar a natureza do quociente e do resto.
Vamos dividir 69 por 8.

- na tabela do 8, o valor mais próximo, e menor, de 69 é 64 (quociente é 8); ou seja, 8 está contido em 64, 8 vezes; então:

$$\begin{array}{r} 69 \\ \underline{64} \\ 5 \end{array}$$

Nota: se 69 fossem 69 rublos, então teríamos 8 grupos com 8 rublos (quociente), cada grupo, e sobrariam 5 rublos. Se fossem 69 centenas, então o quociente seria 8 centenas e, o resto, 5 centenas.

Tarefa nº 6. Divida (indique o quociente e o resto):

- 2400 por 4 (nota: 2400 equivale a 24 centenas).
- 46000 por 7.
- 950000 por 9. *(*)*

---

[9] *Was im vorhergehenden von der Division mit einem einfachen Divisore ist gesagt worden, muss eigentlich von Unitäten verstanden werden. Das ist, wann der Dividendus und der Divisor Unitäten bedeuten, so zeigen auch die Zahlen, welche fur den Quotum und Rest herausgebracht werden, Unitäten an. Wann aber nur der Divisor Unitäten bedeutet, der Dividendus aber entweder Decades oder Cenienarios oder Millenarios etc. anzeiget, so müssen auch die Zahlen, welche für den Quotum und Rest gefunden werden, von eben diesen Sorten, nämlich entweder von Decadibus oder Centenariis oder Millenariis etc., verstanden werden. (p. 122)*

6. *Euler: "Se um número composto, tão grande quanto possa ser, deve ser dividido por um número simples portanto todas as partes em si, que contém todos os tipos particulares, dos quais o próprio número é composto, será dividido pela divisão, pelo qual o início deve ser feito a partir do maior tipo. Mas o resto, que é deixado por cada tipo, deve ser transformado no seguinte menor tipo e adicionado ao mesmo tipo, e assim procedendo por divisão até às unidades de menor tipo: desde então todos esses quocientes particulares do quociente procurado devem ser adicionados; e o que resta da última divisão, é o resto que sobra*[(10)]*".*

Vamos encontrar o quociente e o resto da divisão de 6903 por 3. Note que 6903 pode ser separado em três partes, a saber: 6 mil, 9 centenas e 3 unidades:

- 6 mil divididos por 3 equivalem a 2 mil (da tabela, 3 está contido em 6, 2 vezes);
- 9 centenas divididas por 3 equivalem a 3 centenas;
- 3 unidades divididas por 3 equivalem a 1 unidade.

Adicionando os quocientes, particulares, obtemos o quociente: 2301, e não sobra nada (resto nulo).

Tarefa nº 7. Indique o quociente e o resto da divisão de:

- ○ 2402 por 2. *(*)*
- ○ 5105 por 5. *(*)*
- ○ 12606 po 6. *(*)*

Vamos encontrar, agora, o quociente e o resto da divisão de 8359 por 6. Acompanhe!

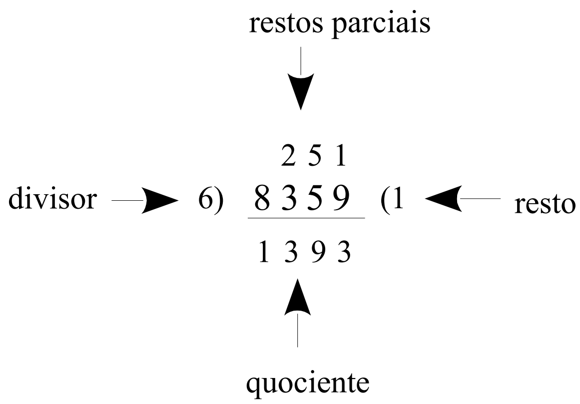
Vamos separá-lo em partes, como antes: 8 mil, 3 centenas, 5 dezenas e 9 unidades:

- 8 mil dividido por 6 equivalem a **1 mil**, mas sobram 2 mil; juntemos este resto com a próxima parte, centenas. Para tanto, vamos transformar em centenas: 2 mil equivalem a 20 centenas;
- 20 centenas, do resto anterior, com as **3 centenas** de antes perfazem 23 centenas. Estas, divididas por 6, equivalem a 3 centenas, mas sobram 5 centenas; do mesmo modo que antes, 5 centenas equivalem a 50 dezenas;

[(10)] Wann eine zusammengesetzte Zahl, so gross dieselbe immer sein mag, durch eine einfache Zahl dividirt werden soll, so muss man alle Theile derselben, das ist alle besonderen Sorten, aus welchen dieselbe Zahl bestehet, durch den Divisorem dividiren, wobei der Anfang von den grössten Sorten gemacht werden muss. Der Rest aber, welcher bei einer jeglichen Sorte überbleibt, wird in die folgende geringere Sorte verwandelt und zu derselbigen Sorte hinzugesetzt, und also mit der Division bis zu den Unitäten als der kleinsten Sorte fortgefahren: da dann alle diese besonderen Quoti zusammen den gesuchten Quotum ausmachen; und was bei der letzten Division übrig bleibt, ist der rückstehende Rest. (p. 124)

- 50 dezenas com 5 dezenas, de antes, perfazem 55 dezenas. Estas, divididas por 6, equivalem a **9 dezenas**, mas sobra 1 dezena; do mesmo modo, 1 dezena equivale a 10 unidades;
- 10 unidades com 9 unidades, de antes, perfazem 19 unidades. Estas, divididas por 6, equivalem a **3 unidades**, mas sobra 1 unidade; aqui termina a divisão: o resto é a unidade e o quociente, 1393 (adição dos quocientes parciais).

Tudo que foi dito pode ser obtido mais brevemente da seguinte maneira (esquema):



Este resume tudo o que foi dito antes. Veja: o divisor é colocado à esquerda, separado pelo parênteses “)”.

O quociente é separado por um traço, logo abaixo do dividendo. Acompanhe, fazendo da esquerda para a direita:

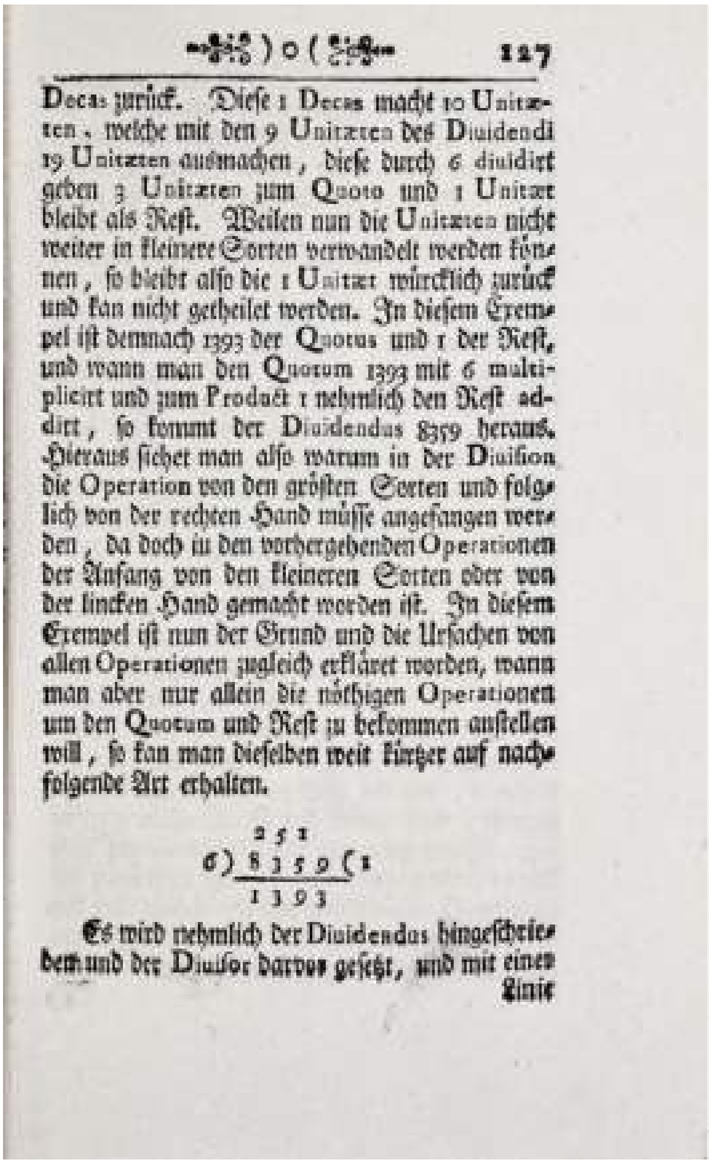
- 8 dividido por 6 resulta, no quociente, 1, embaixo do 8; e resto parcial 2;
- o resto parcial 2, acima do 8, forma 23 com o próximo algarismo do dividendo, ao lado do 8;
- assim, 23 dividido por 6 resulta quociente 3 e resto parcial 5;
- o resto parcial 5 forma 55 com o próximo algarismo;
- 55 dividido por 6 resulta quociente 9 e resto parcial 1;
- o resto parcial 1 forma 19 com o próximo algarismo;
- 19 dividido por 6 resulta quociente 3 e o resto final, 1, é colocado à direita e separado pelo parênteses “(“.

Tarefa nº 8. Indique o quociente e o resto da divisão de:

- 13628 por 4;
- 34973 por 5;
- 1563 por 7.

Use o esquema da divisão apresentada no exemplo anterior.

Figura 3.2 – Detalhe da página no original em alemão (p. 127), onde se apresenta o esquema da divisão mencionada no exemplo.



)o(127

Decas zurück. Dieſe 1 Decas macht 10 Unitæten, welche mit den 9 Unitæten des Dividendi 19 Unitæten ausmachen, dieſe durch 6 dividirt geben 3 Unitæten zum Quoto und 1 Unitæt bleibt als Reſt. Weilen nun die Unitæten nicht weiter in kleinere Sorten verwandelt werden können, ſo bleibt alſo die 1 Unitæt wircklich zurück und kan nicht getheilet werden. In dieſem Exempel iſt demnach 1393 der Quotus und 1 der Reſt, und wann man den Quotum 1393 mit 6 multiplicirt und zum Product 1 nehmlich den Reſt addirt, ſo kommt der Dividendus 8359 heraus. Hieraus ſiehet man alſo warum in der Diviſion die Operation von den gröſten Sorten und folglich von der rechten Hand müſſe angefangen werden, da doch in den vorhergehenden Operationen der Anfang von den kleineren Sorten oder von der lincken Hand gemacht worden iſt. In dieſem Exempel iſt nun der Grund und die Urſachen von allen Operationen zugleich erkläret worden, wann man aber nur allein die nöthigen Operationen um den Quotum und Reſt zu bekommen anſtellen will, ſo kan man dieſelben weit kürtzer auf nachfolgende Art erhalten.

251
6) 8359 (1
1393

Es wird nehmlich der Dividendus hingeſchrieben und der Diviſor darvor geſetzt, und mit einer Linie

Fonte: DTA deutschestextarchiv.de

7. *Euler: "Se o divisor for um número simples com um ou vários zeros anexados, tais como 30, 400, 7000 ou similares, então a divisão pode ser feita da mesma forma que com números simples. Então, precisamos apenas jogar fora tantos zeros do divisor, e, do dividendo, tantos quantos algarismos do lado direito, e de modo que esse dividendo possa ser dividido pelo número simples que surge, e, assim, podemos encontrar o verdadeiro quociente. Mas para o resto, devemos colocar de volta no lugar os números descartados do dividendo do lado direito, de modo que tenhamos o verdadeiro resto[11]".*

Observe o exemplo. Vamos encontrar o quociente e o resto da divisão de 156327 por 700.

Repetindo o processo como antes (regra 6), vamos dividir 1563 centenas por 7 (desprezaram-se os zeros). As 27 unidades são menores do que o 700; logo, concluímos de imediato que as 27 unidades compoerão o resto da divisão; então, temos:

```
       1 2
7)   1 5 6 3   (2  ←  resto
     -------
       2 2 3
         ↑
     quociente
```

223 grupos com 7 centenas cada um e sobram 2 centenas.

Assim, na divisão de 156327 por 700 obtemos como quociente 223 e resto: 200 e 27, ou seja, 227. Esquematicamente, podemos escrever:

```
       1 2 2
7)   1 5 6 3|2 7
     -------
       2 2 3
```

quociente: 223   resto: 227

Tarefa nº 9. Indique o quociente e o resto da divisão de:

- 2756389 por 8000.
- 76034820 por 1000.
- 9234637026 por 300000. *(*)*

---

[11] *Wann der Divisor eine einfache Zahl mit einer oder etlichen daran gehängten Ziffern ist, als 30 oder 400 oder 7000 oder dergleichen, so kann die Division auf eben die Art gemacht werden als mit den einfachen Zahlen. Dann man hat nur nöthig, von dem Divisore die Ziffern, und von dem Dividendo auch ebensoviel Figuren von der rechten Hand weg zu schmeissen, und sodann diesen herausgekommenen Dividendum durch den einfachen Divisorem zu dividiren, da man dann den wahren Quotum bekommen wird. Zu dem Rest aber, der überbleibt, muss man die von dem Dividendo abgeschnittenen Figuren von der rechten Hand hinzusetzen, so wird man den wahren Rest haben. (p. 130)*

8. *Euler: "Se o divisor for um número composto, então a divisão será realizada da seguinte forma. Em primeiro lugar, tantos números devem ser cortados do lado esquerdo do dividendo, até que esse número reduzido seja maior do que o divisor, e, consequentemente, possa ser dividido pelo mesmo divisor. A partir disso, vemos quantas vezes o divisor está contido nesse número truncado, e esse número fornece o primeiro algarismo da esquerda no quociente. Em terceiro lugar multiplicamos o divisor pelo número escrito no quociente e retiramos o produto da parte considerada do dividendo; e, ao resto, anexamos o algarismo seguinte à direita do dividendo. Em quarto lugar procuramos, quantas vezes o divisor está contido neste número, e escrevemos no quociente como o segundo algarismo. Em quinto lugar, multiplicamos o divisor por esse número e retiramos o produto desse número. Anexamos o número seguinte ao resto, e retiramo-lo da forma prescrita, do qual obtemos então o terceiro algarismo no quociente. E assim prosseguimos até que todos os números do dividendo sejam considerados, desde então temos o quociente completo; e o que sobra na última subtração, ou seja, é o resto[(12)]".*

A divisão por um divisor composto deve ser da mesma forma que por uma divisão simples; a saber, em ambos os casos, as operações de qualquer tipo devem ser estabelecidas exatamente na mesma ordem. A única diferença consiste em que um divisor simples, toda divisão ou operação, pode ser feita mentalmente; já para um divisor composto, só pode ser feita no papel.

Vamos encontrar o quociente e o resto da divisão de 178093 por 23. Para tanto, façamos como na regra 6: vamos usar o algoritmo (esquema) apresentado, ajustando-o, e, à parte, rascunhos para se encontrar os restos parciais.

Ainda: vamos escrever os restos parciais abaixo do dividendo, fazendo subtrações para simplificar os cálculos, e o quociente, à direita (essa nova maneira de escrita esquemática vai facilitar cálculos futuros, como veremos):

[(12)] *Wann der Divisor eine zusammengesetzte Zahl ist, so wird die Division folgendergestalt verrichtet. Erstlich werden von der linken Hand von dem Dividendo so viel Figuren abgeschnitten, bis diese abgeschnittene Zahl grösser ist als der Divisor und folglich durch denselben dividirt werden kann. Hierauf sieht man, wie viel mal der Divisor in dieser abgeschnittenen Zahl enthalten ist, und diese Anzahl gibt die erste Figur von der linken Hand in den Quotum. Drittens multiplicirt man den Divisorem durch die in Quotum geschriebene Zahl und zieht das Product von dem gedachten Theil des Dividendi ab, und an den Rest hängt man zur Rechten die folgende Figur des Dividendi an. Viertens sucht man, wie viel mal der Divisor in dieser Zahl enthalten ist, und so viel schreibt man in den Quotum für die zweite Figur. Mit dieser Zahl multiplicirt man fünftens den Divisorem und zieht das Product von jener Zahl ab. An den Rest hängt man die weiter folgende Figur des Dividendi, und verfähret auf beschriebene Art, da man dann die dritte Figur in den Quotum bekommt. Und auf solche Weise fährt man fort, bis alle Figuren des Dividendi betrachtet worden sind, da man dann den völligen Quotum haben wird; und was in der letzten Subtraction übergeblieben, das ist der Rest. (pp. 133 - 134)* (divisor) (dividendo) (quociente)

```
23)  1 7 8|0 9 3   (7743
     1 6 1
     -----
       1 7 0
       1 6 1
       -----
           9 9
           9 2
           ---
             7 3
             6 9
             ---
   Resto:    4
```

(rascunhos)

* Inicialmente, vamos dividir 178 mil por 23: observe 8 multiplicado por 20 vale 160 (próximo a 178 por falta); já 9 multiplicado por 20 vale 180 (passou!). Logo, testemos 8 multiplicado por 23:

```
  2 3
    8
-----
1 8 4   (passou!)
```

Então, vamos ver 7 multiplicado por 23:

```
  2 3
    7
-----
1 6 1  (próximo por falta!)
```

7 é o primeiro algarismo do quociente, lendo da esquerda! E o segundo também, repetindo-se o processo e observando, agora, 170 – veja acima, que novamente o 161 se aproxima por falta.

O resto parcial 9 forma 99 com o próximo algarismo.

Agora, concluímos que o melhor resultado por falta será o 92 – quando fazemos 4 multiplicado por 23; ou seja, 4 é o próximo algarismo do quociente:

```
  2 3                      2 3
    5                        4
-----                      ---
1 1 5  (passou!)           9 2  (próximo por falta!)
```

Por fim, obtemos o resto parcial 7 que forma 73 com o último algarismo do dividendo; este valor é aproximado por falta por 69 – quando multiplicamos 23 por 3; este é o último algarismo do quociente, na sua construção!

```
2 3
  3
---
6 9   (próximo do 73 por falta!)
```

logo, o quociente da divisão de 178093 por 23 é 7743; já o resto vale 4.

Tarefa nº 10. Encontre o quociente e o resto da divisão de:

- 1268 por 319.
- 943769703 por 251.
- 79637 por 143. *(*)*

9. *Euler: "Esta regra de divisão segue agora aqui: depois de colocarmos o divisor para o dividendo, assim devem ser truncados do lado esquerdo do dividendo tantos números quanto os presentes no divisor, a saber, quando este corte fornece um número tão grande como o divisor, ou um número maior do que o divisor no caso adverso. A partir disso, vemos quantas vezes o divisor está contido neste número truncado, e escrevemos o número encontrado como o primeiro número no quociente à esquerda. Multiplicamos o divisor por esse quociente e subtraímos o produto do dividendo truncado. A este resto anexamos o algarismo seguinte do dividendo, e procuramos novamente, quantas vezes o divisor está contido neste número, número esse que resulta o segundo algarismo do quociente; e com isto multiplicamos ainda mais o divisor, subtraímos o produto de cada número, e anexamos ao resto o algarismo seguinte do dividendo. Neste número, procuramos ainda, quantas vezes o divisor está contido, e realizamos a mesma operação acima, até atingirmos o quociente completo. O que resta da última subtração é o resto, que ainda permanece da divisão[13]".*

Vamos calcular, agora, a divisão de 255543000 por 827.

```
827)  2 5 5 5|4 3 0 0 0   (309000
      2 4 8 1
      -------
          7 4 4 3
          7 4 4 3
          -------
                0 0 0
```

[13] *Hieraus folget nun diese Regel für die Division: Nachdem man den Divisorem für den Dividend um gesetzet, so werden von dem Dividendo zur Linken entweder so viel Figuren, als der Divisor hat, abgeschnitten, wann nämlich dieser Abschnitt eine so grosse oder grössere Zahl austragt als der Divisor ist, oder in widrigem Falle eine mehr. Hierauf sieht man, wie viel mal der Divisor in diesem Abschnitt enthalten ist, und die gefundene Anzahl schreibt man in Quotum als die erste Figur zur Linken. Mit diesem Quoto multiplicirt man den Divisorem und subtrahirt das Product von dem Abschnitt des Dividendi . An den Rest hängt man die nach dem Abschnitt folgende Figur des Dividendi an, und sucht wiederum, wieviel mal der Divisor in dieser Zahl enthalten ist, welche Zahl die zweite Figur des Quoti gibt; und mit dieser multiplicirt man wieder den Divisorem, subtrahirt das Product von jener Zahl und hängt an den Rest die folgende Figur des Dividendi. In dieser Zahl sucht man ferner, wieviel mal der Divisor enthalten ist, und verrichtet eben die vorigen Operationen, bis man den völligen Quotum bekommen. Was bei der letzten Subtraction zurückbleibt, ist der Rest, so bei der Division noch übrig ist. (pp. 141 - 142)*

rascunho

* 2555 por 827

Note:
$$\begin{array}{r} 800 \\ 4 \\ \hline 3200 \end{array}$$
(passou!)

Teste:
$$\begin{array}{r} 827 \\ 3 \\ \hline 2481 \end{array}$$
(próximo por falta)

* 744 por 827

Note que 744 dezenas de milhar não podem ser divididos em dezenas de milhar por 827; logo, vamos considerar 7443 mil por 827. No quociente, deixamos a casa decimal "dezena de milhar" vazia – algarismo 0.

Note:
$$\begin{array}{r} 800 \\ 9 \\ \hline 7200 \end{array}$$
(próximo por falta)

Observe que o maior algarismo possível numa casa decimal é o 9. Na nossa construção ou montagem do valor do quociente, estamos multiplicando os valores possíveis para os algarismos do quociente com o divisor, afim de se aproximar, por falta, dos restos parciais!

Teste:
$$\begin{array}{r} 827 \\ 9 \\ \hline 7443 \end{array}$$
(igual!)

Ainda: 7443 mil dividido por 827 resulta em 9 mil (9000) e não há sobras! Como não há mais partes a se considerar no dividendo, completemos com os três zeros o quociente para indicar o 9 mil. Logo, o quociente da divisão vale 309000 e não há sobras.

Tarefa nº 11. Encontre o quociente e o resto da divisão de:

- 681200 por 731. *(*)*
- 439967000 por 152. *(*)*
- 943769703 por 251. *(*)*

Vamos calcular, agora, a divisão de 1307629 por 3700.

Observe que as 29 unidades de 1307629 vão compor o resto da divisão de 13076 centenas por 37 centenas (veja a regra 7).

Assim, temos pelo algoritmo (esquema da divisão)

(divisor)	(dividendo)	(quociente)
37|00)	130|76|29	(353
	111	
	197	
	185	
	126	
	111	
	Resto: 1529	

(rascunho)

* 130 por 37:

$\begin{array}{r}30\\4\\\hline 120\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r}37\\4\\\hline 148\end{array}$ (passou!) $\quad$ $\begin{array}{r}37\\3\\\hline 111\end{array}$ (próximo por falta)

* 197 por 37:

$\begin{array}{r}30\\7\\\hline 210\end{array}$ (passou!) $\quad$ $\begin{array}{r}30\\6\\\hline 180\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r}37\\6\\\hline 212\end{array}$ (passou!) $\quad$ $\begin{array}{r}37\\5\\\hline 185\end{array}$ (próximo por falta)

* 126 por 37:

$\begin{array}{r}30\\4\\\hline 120\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r}37\\4\\\hline 148\end{array}$ (passou!) $\quad$ $\begin{array}{r}37\\3\\\hline 111\end{array}$ (próximo por falta)

Logo, o quociente da divisão de 1307629 por 3700 vale 353 e o resto, 1529.

Tarefa nº 12. Encontre o quociente e o resto da divisão de:

- 218639 por 7300. *(*)*
- 769934 por 1520. *(*)*
- 123456789 por 98000. *(*)*

Encerramos, aqui, a parte 1 das tarefas didáticas para se atingir o objetivo: adição e subtração de frações.

Agora, como este guia para a divisão é suficiente e, para uma prática final das regras dadas, nada mais é necessário do que um exercício pronto; portanto, alguns exemplos devem ser acrescentados, pois desejamos mostrar o uso da divisão na vida quotidiana.

Tarefa nº 13. Exemplos de Divisão: resolva os problemas

I. Dezenove pessoas têm entre si a soma de 71098 rublos, que cada uma obtém tanto como a outra. Agora a questão é: quanto que cada uma obterá?

II. Um pai deixa a seus três filhos 39690 rublos, que em virtude da vontade do mesmo devem ser divididos de tal forma que o mais velho obtenha o dobro do filho do meio, mas o filho do meio obtém o dobro do filho mais novo. Agora a questão é: quanto cada filho herdou disso?

III. 748818 rublos devem ser divididos entre um certo número de soldados, de modo que cada um receba 283 rublos. Então a questão é: quantos soldados existiam?

IV. Qualquer pessoa que queira viajar ao redor da Terra deve completar uma viagem de cerca de 132300000 pés ingleses. Agora a questão é: quantos pés desse tipo existem num grau, e igualmente num *verts*(14)? (Uma volta completa na Terra vale 360° e 1° equivale a 105 *verst*).

Parte 2: sobre as frações e a natureza geral das mesmas.

1. *Euler: “Na divisão, se o divisor e o dividendo forem fornecidos de modo que a operação não possa ser executada sem um resto, então o quociente, que indicará quantas vezes o divisor está contido no dividendo, é chamado de fração(15)”.*

Observe a divisão de 17 por 5:

(14) O *verst* é uma unidade de comprimento obsoleta russa: 1 *verst* equivale a 1,0668km. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Unidades_russas. Acesso em: 15 jun. 2021.

(15) *Wann in der Division der Divisor und der Dividendus so beschaffen sind, dass die Operation ohne Rest nicht vollzogen werden kann, so wird der Quotient, welcher anzeigt, wie viel mal der Divisor in dem Dividendo enthalten ist, ein Bruch genannt. (p. 151)*

$$5)\ \underline{1\ 7}\ (2$$
$$3$$

logo, o quociente é 3 e o resto, 2.

Entendemos, então, que há 2 “elementos” do 17 que não foram incluídos na divisão (pois os 5 grupos possuem 3 elementos cada um). Mas, 5 multiplicado por 3 resulta em 15, que é menor do que 17.

Podemos pensar que o “verdadeiro quociente” (aquele único valor que multiplicado por 5 resulta em 17) deve ser maior que 3; mas, 5 multiplicado por 4 (este, próximo inteiro depois do 3, consecutivo) resulta em 20, que é maior do que 17. Logo, concluímos que o “verdadeiro quociente” deve estar entre 3 e 4.

Não há inteiros entre 3 e 4; logo, este “verdadeiro quociente” **não** é um número inteiro.

Chamemo-no de número quebrado ou fração.

Este conceito de fração dado na época possui a intenção de tornar a divisão uma operação com somente um resultado, assim como a adição, subtração e a multiplicação. Haja vista que para os naturais, a divisão fornece dois resultados importantes: o quociente e o resto.

Assim, o quociente verdadeiro, que indica quantas vezes 5 deve estar contido em 17, é consequentemente uma fração, que não é um número inteiro; e desta mesma fração obtemos ao mesmo tempo um entendimento completo de sua origem, na medida em que o mesmo é um número, que indica quantas vezes 5 está contido em 17.

Tarefa nº 14. Encontre o intervalo, nas divisões a seguir, onde o “verdadeiro quociente” está:

- 21 dividido por 2. *(*)*
- 133 dividido por 7. *(*)*
- 459 dividido por 8. *(*)*

2. *Euler: “Uma fração ou número quebrado, que é o quociente verdadeiro, que surge de qualquer divisão, se o divisor não estiver contido um número exato de vezes no dividendo, é geralmente escrito assim: escrevemos o divisor abaixo do dividendo, e traçamos uma linha entre eles. Assim, uma fração escrita desta forma indica quantas vezes o número que está abaixo da linha está contido no número acima[16]”.*

---

[16] *Ein Bruch oder gebrochene Zahl, das ist der wahre Quotus, welcher aus einer Division, da der Divisor in dem Dividendo nicht just etliche mal enthalten ist, entspringt, pflegt also geschrieben zu werden: Man schreibet den Divisor unterden Dividendum, und zieht da zwischen eine Linie. Ein Bruch also auf diese Art geschrieben deutet an, wie viel mal die unter der Linie stehende Zahl in der darüber stehenden enthalten sei. (p. 153)*

Devemos entender um "número exato de vezes" como uma quantidade inteira de vezes sem resto.

Vamos representar, por exemplo, a fração que se obtém dividindo-se 17 por 5 como:

$$\frac{17}{5}$$

Tarefa nº 15. Represente as frações que se obtém dividindo-se:

- 8 por 7.
- 21 por 12. *(*)*
- 133 por 17. *(*)*
- 459 por 8. *(*)*

3. *Euler: "Para que uma fração possa ser melhor comparada com números inteiros, deve-se observar que, se a unidade ou um número inteiro for dividido em tantas partes iguais, como mostra o número que está sob a linha, ele contém apenas tantas partes iguais, como o número superior indica*[(17)]*".*

Visto que $\frac{7}{4}$ *indica o quociente, o resultado de 7 dividido por 4; portanto, a partir do qual, a quarta parte de 7 deve ser indicada. Então, 7 dividido por 4 nada mais é do que encontrar a quarta parte de 7. A partir da qual é evidente que tal fração não pode ser indicada senão pela quarta parte do número anterior [...] que além disso é um novo método, para apresentar o valor das frações.*

Observe, por exemplo, que $\frac{7}{4}$ representa um valor, fração, que <u>se</u> <u>somado</u> <u>quatro</u> <u>vezes</u> resulta em 7.

Considere agora $\frac{1}{4}$. Ela indica que se a somarmos quatro vezes, então teremos a unidade. Mas 7 é sete vezes superior do que a unidade, ou seja, sete vezes superior à adição de $\frac{1}{4}$'s (quatro vezes $\frac{1}{4}$). Se escrevermos esta adição de $\frac{1}{4}$'s, sete vezes, teremos parcelas de $\frac{1}{4}$ que, juntas, valem sete. Agrupando-as de sete em sete, teremos quatro grupos iguais com $\frac{1}{4}$'s sendo somados.

[(17)] Um einen Bruch mit den ganzen Zahlen besser zu vergleichen, so ist zu merken, dass, wann die Unität oder ein ganzes in so viel gleiche Theile zertheilet wird, als die unter der Linie stehende Zahl ausweist, alsdann der Bruch so viel dergleichen Theile enthalte, als die obere Zahl anzeigt. (p. 154)

Note que, no início, mencionamos que $\frac{7}{4}$, somado quatro vezes vale sete: corresponde, então, à adição dos quatro grupos com $\frac{1}{4}$'s somados sete vezes. De um lado, estamos somando quatro parcelas iguais a $\frac{7}{4}$. Do outro, temos quatro parcelas iguais a um grupo de $\frac{1}{4}$ somados sete vezes. Logo, uma parcela $\frac{7}{4}$ equivale a uma parcela – grupo de $\frac{1}{4}$, somado sete vezes.

Veja tabela:

$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
7	1	1	1	1	1	1	1

Na última linha estão as somas feitas das partes consideradas nas colunas da tabela.

Na primeira coluna, a adição dos quatro $\frac{7}{4}$'s resultam em 7 – valor indicado no canto esquerdo da última linha.

As outras colunas resultam na unidade: observe que a adição dessas unidades – indicadas na última linha – dá a soma 7, no canto à esquerda.

Portanto, da mesma forma que 7 é sete vezes maior do que a unidade, $\frac{7}{4}$ é sete vezes maior do que $\frac{1}{4}$.

Tarefa nº 16. Indique quantas vezes:

- $\frac{3}{2}$ é maior do $\frac{1}{2}$. *(*)*
- $\frac{6}{5}$ é maior do que $\frac{1}{5}$. *(*)*
- $\frac{9}{10}$ é maior do que $\frac{1}{10}$. *(*)*

4. *Euler: "Se uma fração for escrita da forma acima mencionada, então o número que se encontra acima da linha é chamado de numerador, enquanto que o número que se encontra abaixo da linha é chamado de denominador. Mas qualquer fração pode ser pronunciada assim: em primeiro lugar chamamos o numerador e depois o denominador com a adição da palavra parte. Como esta fração* $\frac{5}{12}$ *é pronunciada cinco décimas segundas partes*[(18)]*".*

Em português, utilizamos a palavra avos após a menção da fração (começando pelo numerador e, depois, dizendo o valor do denominador) seguida da palavra avos, para valores do denominador acima de dez. Por exemplo: a fração $\frac{5}{12}$ seria dita: cinco doze avos[(19)].

Para os denominadores menores do que dez, há nomes especiais, a saber: 2, metade ou meio; 3, terço; 4, quarto; 5, quinto; 6, sexto; 7, sétimo; 8, oitavo e 9, nono.

Para os denominadores valendo 10, 100, 1000, 1.000.000 ou 1.000.000.000 há nomes especificos para as frações, respectivamente: décimo, centésimo, milésimo, milionésimo ou bilionésimo.

Vamos indicar o numerador e o denominador da fração $\frac{7}{10}$: 7 é o numerador (pois é o contador, ou seja, indica quantas partes, $\frac{1}{10}$, são contadas – veja regra 3, imediatamente anterior); 10 é o denominador, pois nomeia a natureza dessas partes, indicando quantas dessas partes constituem o todo. Leríamos: sete décimos.

[(18)] *Wann ein Bruch auf vorbesagte Art geschrieben ist, so wird die über der Linie stehende Zahl der Zähler, die untere aber der Nenner genannt. Ein jeder Bruch aber wird also ausgesprochen: erstlich nennt man den Zähler und darauf den Nenner mit Hinzusetzung des Worts Theil. Als dieser Bruch* $\frac{5}{12}$ *wird ausgesprochen: fünf zwölfte Theil. (p. 156)*

[(19)] Esse termo avo veio do harmonico grego da oitva e foi introduzido na Espanha e em Portugal pelos árabes. Somente estes dois países o adotaram para designar a parte fracionária a partir do décimo. No *Diccionário Histórico da Real Academia Española*, na sua edição de 1933, encontramos o seguinte texto sobre *avo*: "a existência deste termo foi a partir da introdução, na Península Ibérica, da palavra *habba* = partícula do árabe, que sofreu a adaptação *avo*, em Portugal, e *ava*, na Espanha".

Tarefa nº 17. Indique o numerador e o denominador das frações. Escreva seus nomes.

- $\frac{3}{4}$.
- $\frac{15}{28}$. *(*)*
- $\frac{5}{12}$.

5. *Euler: "Numa fração, se o numerador é menor do que o denominador, a fração também é menor do que o número inteiro um ou 1. Mas se o numerador for maior do que o denominador, o valor da fração também é maior do que 1. Todavia, uma fração, que o numerador é igual ao denominador, representa o número inteiro um ou 1[(20)]".*

Vamos analisar as frações: $\frac{3}{7}, \frac{7}{5}, \frac{30}{7}, \frac{4}{4}$ e $\frac{6}{3}$.

- $\frac{3}{7}$, temos, aqui, 3 como dividendo e 7, divisor. Assim, o quociente vale zero (pois 3 é menor do que 7) e o resto, 3. Concluímos que o verdadeiro quociente, ou seja, a fração $\frac{3}{7}$ está entre 0 e 1. Ela é menor do que 1 (numerador menor do que o denominador);

- $\frac{7}{5}$,

$$\begin{array}{rcl} 5) & 7 & (2 \\ \hline & 1 & \end{array}$$

Veja que $\frac{7}{5}$ está entre 1 e 2, ou seja, é maior do que o inteiro 1 (numerador maior do que o denominador).

- $\frac{30}{7}$,

$$\begin{array}{rcl} 7) & 30 & (2 \\ \hline & 4 & \end{array}$$

Veja que $\frac{30}{7}$ está entre 4 e 5, ou seja, é maior do que o inteiro 4 (numerador maior do que

[(20)] Ist in einem Bruch der Zähler kleiner als der Nenner, so ist auch der Bruch selber kleiner als ein ganzes oder als 1. Ist aber der Zähler grösser als der Nenner, so ist auch der Inhalt des Bruchs grösser als 1. Ein Bruch aber, da der Zähler dem Nenner gleich ist, hält just ein ganzes. (p. 158)

o denominador).

- $\frac{4}{4}$,

4) 4 (0

1

Temos $\frac{4}{4}$ é tanto quanto 1, numerador igual ao denominador, então a fração vale a unidade.

- $\frac{6}{3}$,

3) 6 (0

2

Temos $\frac{6}{3}$ igual a 2, esta fração é tão grande quanto o número inteiro 2 (dizemos que ela é uma *pseudo* fração ou fração aparente).

Notoriamente, quando o numerador for menor do que o denominador, não se pode retirar do dividendo (numerador) uma quantidade inteira de divisores (denominador). Logo, o quociente será zero e o "verdadeiro quociente", a fração, vai estar entre 0 e 1 (fração menor do que a unidade).

Já para aquela fração, não aparente, cujo numerador é maior do que o denominador, pode-se retirar daquele uma quantidade inteira de denominador: se essa quantidade for a unidade (quociente 1) ainda assim o "verdadeiro quociente" vai estar entre 1 e 2, pois não se está tratando de pseudo ou fração aparente agora.

Se essa quantidade inteira retirada for maior que a unidade, ainda assim a fração será maior do que a unidade.

Logo, para a fração não aparente, cujo numerador é maior do que o denominador, o quociente será, no mínimo, a unidade e como o resto não será nulo, o verdadeiro quociente, ou seja, a fração dada, vai ser maior do que a unidade.

Por fim, quando o numerador for igual ao denominador então pode-se retirar do dividendo uma única vez o valor do divisor: o quociente é a unidade. Logo, o "verdadeiro quociente", a fração, vale a unidade.

Tarefa nº 18. Analise, agora, as frações: $\frac{5}{7}, \frac{8}{5}, \frac{36}{9}, \frac{11}{11}$ e $\frac{8}{4}$. *(*)*

6. *Euler: "Uma fração, que é maior que 1, ou em que o numerador é maior que o denominador, pode ser separada em dois termos da seguinte forma, um dos quais é um número inteiro, mas o outro é uma fração, que é menor do que o número inteiro um. A saber, dividimos o numerador pelo denominador na forma prescrita de divisão, e isso dá o quociente que é uma parte, ou seja, o número inteiro, mas o resto resulta o numerador para a segunda parte fracionária, da qual o denominador anterior é usado[21]".*

Observe o exemplo: $\frac{20}{3}$. Esta fração é maior que o número inteiro 6, como foi demonstrado na regra anterior:

$$3)\ \underline{2\ 0}\ (2$$
$$6$$

estando o "verdadeiro quociente" entre 6 e 7. O quanto esta fração é maior do que 6 é representado pelo valor $\frac{2}{3}$; o valor 2, resto, é parte do dividendo 20 que está sendo dividido por 3.

Essa fração $\frac{2}{3}$ está entre 0 e 1.

Na regra 3, imediatamente anterior, entendemos que $\frac{2}{3}$ representa duas vezes a unidade dividida em três partes. Logo, em comparação, o verdadeiro quociente, $\frac{20}{3}$, é o resultado da soma de 6 com aquela medida: $\frac{2}{3}$.

Indicamos como:

$$6\frac{2}{3}$$

Essa é uma representação de <u>número</u> <u>inteiro</u> <u>com</u> <u>uma</u> <u>fração</u> (o que denominamos hoje como número misto).

Assim, $\frac{20}{3}$ é tão grande quanto seis inteiros adicionados com dois terços, ou seja, $\frac{20}{3}$ é o verdadeiro quociente da divisão de 20 por 3 e, seu valor, avança $\frac{2}{3}$ para além do inteiro 6, entre 6 e 7.

---

[21] Ein Bruch, welcher grösser ist als 1, oder in welchem der Zähler grösser ist als der Nenner, kann folgendergestalt in zwei Glieder zerleget werden, davon eines eine ganze Zahl, das andere aber ein Bruch ist, welcher kleiner als ein ganzes. Nämlich man dividirt den Zähler durch den Nenner auf die in der Division beschriebene Art, und da gibt der Quotus das eine Glied, nämlich die ganze Zahl, der Rest aber gibt für das zweite, gebrochene Glied den Zähler, wozu der vorige Nenner genommen wird. (p. 161)

Tarefa nº 19. Escreva na forma de inteiro com uma fração (número misto), as frações a seguir:

- $\frac{51}{11}$.
- $\frac{10}{3}$.
- $\frac{77}{13}$. *(*)*

7. *Euler: "Um número inteiro junto com uma fração é transformado em uma fração simples, se multiplicarmos o número inteiro pelo denominador da fração e adicionarmos o numerador da fração ao produto, desde que essa soma resulta o numerador da fração simples procurada, mas o denominador anterior é o denominador dado[22]".*

É o caminho inverso. Veja, vamos passar

$$7\frac{2}{3}$$

para a forma de uma representação simples (uma fração):

$$\begin{array}{rl} 7 & \\ 3 & \text{(multiplicação do quociente pelo divisor)} \\ \hline 21 & \\ 2 & \text{(adiciona com o resto)} \\ \hline 23 & \text{(numerador)} \end{array}$$

então, 7 inteiros e $\frac{2}{3}$ é tanto quanto $\frac{23}{3}$.

---

[22] *Eine ganze Zahl nebst einem Bruch wird in einen einzelen Bruch verwandelt, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt und zum Product den Zähler des Bruchs addirt, da dann diese Summe den Zähler des gesuchten einzelen Bruchs, der vorige Nenner aber den Nenner abgibt. (p. 164)*

Tarefa nº 20. Passe os seguintes números inteiros com fração para uma fração simples:

- $2\frac{1}{3}$;
- $5\frac{3}{4}$;
- $128\frac{173}{320}$.

8. *Euler: "Uma fração mantém o seu valor inalterado, se multiplicarmos tanto o denominador como o numerador por um número arbitrário. E da mesma forma uma fração mantém o seu verdadeiro valor, se dividirmos tanto o numerador como o denominador por um número arbitrário. Daí fica claro que qualquer fração, sem alteração de seu valor, pode ser apresentada de infinitas maneiras*[(23)] *".*

Para tanto, observe que uma fração não é mais do que o verdadeiro quociente que surge se dividirmos o numerador pelo denominador. Portanto, qualquer fração indica <u>quantas</u> <u>vezes</u> o denominador <u>está</u> <u>contido</u> no numerador.

Se o denominador está, por exemplo, <u>uma</u> <u>vez</u> no numerador, então se tomarmos "dois numeradores" (dobramos o numerador) então podemos resgatar, dessa nova medida, "dois denominadores". Esse raciocínio vale para qualquer quantidade de vezes que o denominador se encontra no numerador. Continua um para um (uma quantidade de numerador para uma quantidade de denominador).

Desse modo, por exemplo: $\frac{4}{7}$ é tanto quanto $\frac{8}{14}$ ou $\frac{12}{21}$ ou $\frac{16}{28}$.

Analogamente, se o denominador está <u>uma</u> <u>vez</u> no numerador, então <u>metade</u> desse numerador, por exemplo, contém <u>metade</u> do denominador. Ou seja, essa quantidade "metade" é resgatada <u>uma</u> <u>vez.</u>

Desse modo, por exemplo, $\frac{18}{30}$ é tanto quanto $\frac{9}{15}$ ou $\frac{6}{10}$ ou $\frac{3}{5}$.

Aqui cabe uma ressalva: poderíamos ter encontrado a fração $\frac{3}{5}$, representação de $\frac{18}{30}$ por números menores, dividindo numerador e denominador por 6, ao invés de passar por $\frac{9}{15}$ e depois por $\frac{6}{10}$.

Escrever uma fração com números "mais simples" pode ser uma maneira melhor de se representar e entender a fração.

[(23)] *Ein Bruch bleibt seinem Werth nach unverändert, wann man sowohl den Nenner als den Zähler durch eine beliebige Zahl multiplicirt. Und gleichergestalt behält auch ein Bruch seinen vorigen Werth, wann man beides, den Zähler und Nenner, durch eine beliebige Zahl dividirt. Woraus also erhellet, dass ein jeglicher Bruch, ohne seinen Werth zu veränderen, auf unendlich vielerlei Arten vorgestellet werden könne. (p. 167)*

Tarefa nº 21. Ligue as frações equivalentes: *(*)*

• $\frac{1}{2}$ •	• $\frac{6}{8}$
• $\frac{3}{4}$ •	• $\frac{1}{9}$
• $\frac{3}{18}$ •	• $\frac{2}{22}$
• $\frac{21}{9}$ •	• $\frac{1}{2}$
• $\frac{8}{16}$ •	• $\frac{4}{8}$
• $\frac{1}{11}$ •	• $\frac{7}{3}$

9. *Euler: "A fim de ver até certo ponto se um determinado número pode ser dividido por outro, temos as seguintes oito regras, que devem ser levadas em consideração para a redução das frações:*
    1. *todos esses números podem ser divididos por 2 se o último algarismo, à direita, puder ser dividido por 2;[24]"*

Neste momento, vamos conhecer algumas regras de divisibilidade que nos ajudarão a reduzir as frações a numeradores e denominadores a números mais simples (menores).

Considera-se um número dividido por outro quando nesta divisão o resto é nulo.

Veja que dezenas, centenas, milhares e assim por diante todos esses números podem ser divididos por dois; logo, o que indica se o número é divisível por dois é o <u>algarismo</u> <u>na</u> <u>casa</u> <u>das</u> <u>unidades</u> (valor representado à direita). Se este for dividido por dois, o número todo também o será.

Vejamos um exemplo: 1736. Sabemos que 1 mil, 7 centenas e 3 dezenas (indicadas no número) são divisíveis por 2, pelo o que foi dito antes. Assim, o número será divisível por dois se o valor 6, na casa das unidades – último algarismo à direita – for divisível por dois. De fato, seis é divisível por dois (metade de seis vale três); então, 1736 é divisível por 2.

---

[24] *Um einigermassen zu sehen, ob eine vorgegebene Zahl durch andere getheilet werden könne, hat man nachfolgende Regeln, welche bei der Verkleinerung der Brüche wohl in acht genommen zu werden verdienen.*

1. Durch 2 lassen sich alle diejenigen Zahlen theilen, deren letzte Figur nach der rechten Hand sich durch 2 theilen lässt. (p. 172)

Tarefa nº 22. Verifique se estes números são divisíveis por dois: *(*)*

- 52.
- 147.
- 35980.
- 123457.
- 98543.
- 8888881.

9. *Euler: "2. um número pode ser dividido por 4 se os dois últimos algarismos à direita puderem ser divididos por 4;*[(25)] *"*

Veja que centenas, milhares, dezenas de milhar e assim por diante são divisíveis por quatro, pois todas podem ser representadas como quantidade de centenas; e estas são sempre divisíveis por quatro: uma centena dividida por quatro vale 25 unidades; duas centenas, 50, etc. Logo, o que indica se o número é divisível por quatro é se as dezenas, juntamente com as unidades, forem divisíveis por 4.

Vejamos um exemplo: 1736. Reconhecemos que, pelo que foi dito antes, as 17 centenas (indicadas no número) são divisíveis por quatro. Assim, o número será divisível por quatro se o valor 36 – as dezenas juntamente com as unidades – for divisível por 4. De fato, 36 é divisível por quatro (a divisão resulta 9); então, 1736 é divisível por quatro.

Tarefa nº 23. Verifique se estes números são divisíveis por quatro: *(*)*

- 146.
- 3588.
- 123456.
- 98543.
- 888881.
- 132578.

[(25)] *2. Durch 4 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich die zwei letzten Zahlen gegen der Rechten durch 4 theilen lassen. (p. 172)*

9. *Euler: "3. um número pode ser dividido por 8 se os últimos três algarismos à direita puderem ser divididos por 8;*[(26)] *"*

Veja que milhares, dezenas de milhar, centenas de milhar e assim por diante são divisíveis por oito, pois todas podem ser representadas como quantidades de milhar; e estas são sempre divisíveis por oito: um milhar dividido por oito vale 125; dois milhares, 250; etc. Logo, o que indica se o número é divisível por oito é se as centenas, dezenas e unidades, em conjunto, forem divisíveis por 8.

Vejamos um exemplo: 13896. Reconhecemos que os 13 milhares desse número são divisíveis por oito, pelo que foi dito antes. Assim, o número será divisível por oito se o valor 896 o for. De fato, a divisão de 896 por 8 resulta em 112; então, 13896 é divisível por 8.

Tarefa nº 24. Verifique se estes números são divisíveis por oito: *(*)*

- 1512.
- 35880.
- 123456.
- 98543.
- 888881.
- 875234.

9. *Euler: "4. um número pode ser dividido por 5 se o último algarismo à direita for 5 ou 0;*
   5. um número só pode ser dividido por 10 se o último algarismo à direita for zero;[(27)] *"*

Para estas duas regras, a argumentação de sua validade se baseia naquela feita para a primeira regra (regra 9.1) considerando-se, agora, o devido valor na casa das unidades.

Observe que dezenas, centenas, milhares e assim por diante são divisíveis por cinco; resta então saber se o algarismo representativo das unidades também é divisível por cinco; e isso só pode acontecer quando vale 5 ou 0.

Vejamos um exemplo: 705. Reconhecemos que as 7 centenas são divisíveis por cinco, pelo que foi dito antes. Assim, o número será divisível por cinco se o algarismo na casa das unidades for 5 ou 0. De fato, vale cinco (e a divisão de 5 por 5 vale 1); então, 705 é divisível por 5.

[(26)] *3. Durch 8 lässt sich eine Zahl theilen, wann die drei letzten Zahlen gegender Rechten durch 8 getheilet werden können. (p. 172)*

[(27)] *4. Durch 5 lässt sich eine Zahl theilen, wann die letzte Figur nach der Rechten entweder 5 ist oder 0.*
5. Durch 10 lassen sich keine anderen Zahlen theilen, als deren letzte Figur nach der Rechten 0 ist. (p. 172)

Já para a divisibilidade por dez, também reconhecemos imediatamente que dezenas, centenas, milhares e assim por diante são divisíveis por 10; logo, o algarismo das unidades vai indicar se o número original é divisível por dez; o que só pode acontecer se este algarismo for 0.

Observemos o número 700. Este representa 7 centenas e, pelo que foi dito antes, será divisível por dez (e por cinco também!).

Tarefa nº 25. Verifique se estes números são divisíveis por cinco ou por dez: *(*)*

- 55.
- 35880.
- 123456.
- 98545.
- 888881.
- 8723450.

9. *Euler: "6. um número só pode ser dividido por 3 se a soma de todos os seus algarismos dos quais o número é composto puder ser dividida por 3;*
   7. um número só pode ser dividido por 9 se a soma dos seus algarismos dos quais o número é composto, puder ser dividida por 9[(28)]*;"*

[...] Se um número da décima, centésima, milésima posição do número ou superior for divisível por 3 ou 9, resta tanto como se um número igual de unidades somadas fosse dividido por 3 ou 9.

O que se pretende, aqui, é separar aquelas dezenas, centenas, milhares, etc, do número, em questão, em quantidades tais (dezenas, centenas, milhares, etc) que podem ser divididas por 3 (ou 9). Notoriamente, podemos serparar as partes divisíveis por 3 (ou por 9) de tal maneira que apenas resta uma adição de unidades, a qual vai determinar se o número dado, no início, é divisível por 3 (ou por 9).

Para entender a regra da divisibilidade por 3 ou a regra do 9, considere o seguinte: qualquer dezena subtraída de tantas unidades correspondentes, em valor, ao algarismo na dezena produz um número que é sempre divisível por três ou por nove. Vejamos:

[(28)] *6. Durch 3 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich die Summe von allen Figuren, aus welchen die Zahl bestehet, durch 3 theilen lässt.*
7. Durch 9 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich gleichfalls die Summe aller Figuren durch 9 theilen lässt. (p. 173)

$$\begin{array}{r} 10 \\ 1 \\ \hline 9 \end{array}$$

e nove é divisível por três ou nove.

Observe, agora:

$$\begin{array}{r|rr} 20 & 10 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline 18 & 9 & 9 \end{array}$$

Veja que tirar duas unidades de vinte equivale a fazer a primeira conta (uma unidade retirada de dez) duas vezes; logo, produzem-se dois resultados iguais divisíveis por três (ou por nove): é o valor nove.

Essa ideia pode ser estendida para todas as possíveis subtrações mencionadas com as dezenas: a quantidade de resultados divisíveis por três (as subtrações que resultam em 9) equivale ao valor do algarismo na casa das dezenas. Portanto, esse tipo de subtração produz um número sempre divisível por três (ou por nove).

De maneira equivalente a se entender qualquer centena subtraída de tantas unidades correspondentes, em valor, ao algarismo na centena produz um número que é sempre divisível por três ou por nove.

E assim por diante se considerarmos os milhares, dezenas de milhar, centenas de milhar, milhões, etc.

Assim, existe uma maneira de separar dezenas, centenas, milhares, etc, que o número original possui, tal que este número original será a soma dessas dezenas, centenas, milhares, etc, divisíveis por três ou nove, com as unidades obtidas com as subtrações.

Considere o número na sua escrita usual, por exemplo 1737. Vamos retirar as dezenas, centenas, milhares, etc, divisíveis por 3 ou por 9. Veja que podemos escrevê-lo como uma adição de subtrações, como feitas e mencionadas antes, compensada com a inclusão das unidades retiradas.

Por exemplo: 1737.

1737	1000	700	30
	1	7	3
	999	693	27

(aqui estão as subtrações)

999
693
27
1
7
3
7

1737 (aqui está a soma)

Anteriormente, vimos que as referidas subtrações são sempre divisíveis por três ou por nove; logo, a condição para que 1737 seja divisível por três é que a adição das unidades incluídas, para compensação, que correspondem aos algarismos usados na escrita do número, seja divisível por três:

1
7
3
7

18 (soma é divisível por três; logo 1737 é divisível por três)

Note, também, que a condição para que 1737 seja divisível por 9 é que a adição das referidas unidades de compensação (algarismos da escrita de 1737) seja divisível por 9, o que, de fato, acontece.

Outro exemplo: 5 987 625 798 634 não é divisível por 3 (ou por 9), pois a adição de seus algarismos formadores perfazem 79 (que não é divisível por três nem por nove; o que também pode ser verificado, aplicando-se a regra mais uma vez para o 79: a adição de seus algarismos resulta em 16; notoriamente, não é divisível por três, nem por nove!).

Isso equivale a mencionar a regra desse tópico; ou seja os valores das unidades a se adicionar correspondente aos algarismos formadores do número original.

Tarefa nº 26. Verifique se estes números são divisíveis por três: *(*)*

- 55.
- 35880.
- 123456.
- 98545.
- 888885.
- 8723450.

9. *Euler: “8. um número só pode ser dividido por 6 se da mesma forma puder ser dividido por 2 e por 3*[29]*”.*

Essa regra decorre da primeira e da sexta, pois se um número é dividido em duas partes iguais e, da mesma forma, em três partes iguais, então o mesmo também deve ser dividido em seis partes iguais.

De fato, se um número for divisível por dois e por três significa que o número dois e o número três formam um produto com um outro valor, no mínimo com o um, que resulta no número visto. Assim sendo, como o produto de dois e três é seis, este é multiplicado com outro valor, no mínimo um, resultando no número visto.

Vejamos um exemplo: 96. Este número é divisível por 2 (dado pela regra 9.1 anterior) e por 3 (a adição dos algarismos formadores vale 15, que é divisível por três – regra 9.6); logo, pelo que foi dito aqui, 96 é divisível por 6.

Observe, agora, 1344. Este número é divisível por 2 (pois o algarismo da unidade é divisível por 2 – como indica a regra 9.1 anterior) e é divisível por 3 (a adição dos algarismos formadores vale 12, que é divisível por três – regra 9.6); logo, pelo que foi dito aqui, 1344 é divisível por 6.

Essas regras de divisibilidade (apresentadas na regra 9 dessa parte 2) vão ajudar a escrever frações com números mais simples. Por exemplo, vamos verificar se $\frac{96}{1344}$ pode ser escrita de maneira mais simples. Observe que pela regra 8, imediatamente anterior, a fração se mantém inalterada se dividirmos ambos, numerador e denominador pelo mesmo número inteiro. Temos pela regra 9.8, mencionada aqui, que 96 e 1344 são ambos divisíveis por 6; então:

3 6) 9 6 (0 16	1 2 6) 1344 (0 224

o que nos permite reescrever a fração $\frac{96}{1344}$ na sua forma equivalente $\frac{16}{224}$ com números mais simples para o numerador e o denominador.

[29] *8. Durch 6 lassen sich alle diejenigen Zahlen theilen, welche zugleich durch 2 und durch 3 getheilet werden können. (p. 173)*

Tarefa nº 27. Verifique se estes números são divisíveis por seis. *(*)*

- 546.
- 35880.
- 123456.

Ainda: escreva as frações abaixo usando números mais simples – utilize as regras dadas de divisibilidade:

- $\frac{122}{356}$;
- $\frac{368}{1032}$;
- $\frac{7350}{8900}$.

10. *Euler: "Um divisor comum de dois números é tal número, que pode dividir ambos os números; e o maior divisor comum é o maior número, pelo qual ambos os números podem ser divididos. Mas a fim de que o maior divisor comum possa ser encontrado a partir de dois números dados, temos esta regra: dividimos o maior número pelo menor ou definimos o menor como divisor e o maior como dividendo; aqui dividimos o divisor pelo resto, ou seja, fazemos a segunda divisão após a primeira, na qual o resto encontrado é tomado como o novo divisor, mas o divisor anterior deve ser tomado como o novo dividendo; e prosseguimos com tais divisões, de modo que sempre o resto da divisão anterior se torne o divisor seguinte, e o divisor da anterior seja colocado como dividendo seguinte, até chegarmos a uma divisão, que é resolvida sem um resto. E aí o divisor desta última divisão é o maior divisor comum dos dois números dados[(30)]".*

[...] Todos os números são dívisíveis por 1, porque todos podem ser divididos por 1 sem deixar resto; além disso, qualquer número é divisível por si mesmo e, por isso, tem pelo menos dois divisores, a saber: ele próprio e a unidade. Além disso, um divisor de um número é um tal número pelo qual o mesmo número pode ser dividido sem deixar resto; como 3 é um divisor de 12 e 5, um divisor de 15. Agora aqui surge uma diferença principal a ser observada nos números: alguns

---

[(30)] *Ein gemeiner Theiler von zweien Zahlen ist eine solche Zahl, dadurch sich beide Zahlen theilen lassen; und der grösste gemeine Theiler ist die grösste Zahl, durch welche sich beide Zahlen zugleich theilen lassen. Um aber von zweien gegebenen Zahlen den grössten gemeinen Theiler zu finden, hat man diese Regel: Man dividirt die grössere Zahl durch die kleinere, oder setzt die kleinere zum Divisore, die grössere aber zum Dividendo; hierauf dividirt man den Divisorem durch den übergebliebenen Rest, das ist, man macht nach der ersten Division die zweite, in welcher der gefundene Rest zum Divisor, der vorige Divisor aber zum Dividendo gesetzet wird; und also fähret man mit solchen Divisionen fort, indem man immer den Rest der vorigen Division zum Divisor der folgenden, und den Divisor der vorigen zum Dividendo der folgenden setzt, bis man zu einer Division kommt, welche ohne Rest absolvirt wird. Und da ist der Divisor dieser letzten Division der grösste gemeine Theiler der zwei vorgegebenen Zahlen. (pp. 180 - 181)* *números são constituídos de tal forma que não podem ser divididos por nenhum outro número, somente pela unidade e por eles próprios; assim, convenientemente, podem ser chamados números indivisíveis, tais números são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e assim por diante, pois não têm outro divisor além da unidade e eles próprios.*

Os números ditos como indivisíveis são aqueles que, hoje, conhecemos por números primos!

Antes de se encontrar o maior divisor comum, vamos observar um exemplo a parte, onde encontramos os divisores comuns, por exemplo de 12 e 16.

O divisor de um número, assim dito, representa o número que divide outro sem deixar resto. Temos, então, os divisores do 12: 1, 2, 3, 4, 6 e 12. Observe as duplas de divisores:

$$\begin{array}{c|c|c} 12 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline 12 & 12 & 12 \end{array} \quad \text{(multiplicação)}$$

Isso ajuda a encontrar os divisores de um número: buscar duplas! Começa-se pelo 1 (um), divisor de todos, e segue-se observando os números que vêm depois.

Temos, agora, os divisores de 16: 1, 2, 4, 8 e 16. Observe as duplas:

$$\begin{array}{c|c|c} 16 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ \hline 16 & 16 & 16 \end{array}$$

O quatro forma dupla consigo mesmo!

Agora, vamos comparar os grupos de divisores, do 12 e do 16, e indicar aqueles que são comuns: 1, 2 e 4.

Destes, o maior de todos, o maior divisor comum é aquele de maior valor; no caso, é o quatro.

Tarefa nº 28. Encontre o maior divisor comum de:

- 28 e 16. *(*)*
- 36 e 18. *(*)*
- 54 e 81. *(*)*

Nota: use as regras de divisibilidade (regra 9, parte 2) para encontrar as duplas de divisores

Com isso *chegamos finalmente à base desta operação: devemos notar que se dois números têm divisor comum, então, também a diferença entre os dois números pode ser dividida pelo mesmo divisor; da mesma forma também a diferença do primeiro e o dobro, ou triplo, ou qualquer outro múltiplo do outro número pode ser assim dividido pelo mesmo divisor. Mas, agora, se o número maior for dividido pelo número menor, então o resto nada mais é do que a diferença entre o número maior e um múltiplo do menor.*

Vejamos exemplos: considere os números 12 e 45; um divisor comum é 3. Observe que este divide a diferença: que vale 33. Observe, também, que o divisor três divide a diferença do primeiro, doze, com o dobro do outro número, 90: essa diferença vale 78. Ainda observe que a divisão do maior pelo menor representa uma diferença do maior por um múltiplo do menor (seria retirar 36, múltiplo de 12, de 45); essa diferença é o resto da divisão (no caso, esse resto vale 9, que também é divisível por três!).

Observe, agora, que o maior dividor comum de dois números é também o maior divisor comum da diferença (ou da soma), desses mesmos números, em comparação com aqueles.

Considere dois números e um divisor comum. Esse forma uma dupla de divisores com outros valores: um cujo produto resulta no primeiro número e outro, no segundo número. Cada produto indica uma quantidade de "divisor comum".

Temos, por exemplo, o 12 e o 16 e um divisor comum, o 2. Temos que este 2 pertence a uma dupla de divisores: 2 e 6, para resultar no 12; e 2 e 8, para o 16. Temos, então, que há seis vezes o *divisor comum 2* no 12 e oito vezes, no 16.

Ao se efetuar a diferença, se está retirando do maior número a quantidade de "divisor comum" igual ao indicado pelo subtraendo[31].

O valor da diferença indica uma quantidade de "divisor comum" também! E, ao compará-la com o subtraendo ou com o minuendo, o "divisor comum" permanece. No exemplo, se retirarmos seis *divisor comum 2* de oito *divisor comum 2* encontramos dois *divisor comum 2*, ou seja, nesta diferença o *divisor comum 2* permaneceu!

Isso também vale para a soma.

Ainda: com isso, podemos encontrar o maior divisor comum pois esse "divisor comum" pode também ser o maior!

Vamos ver um exemplo a parte: sabemos que o maior divisor comum de 12 e 16 é 4.

O doze indica que o 4 é contado 3 vezes; já o dezesseis indica que o 4 é contado 4 vezes. Logo, temos que de quatro "maior divisor comum" retiram-se três. Resultando em um "maior divisor comum".

---

[31] Recordando os elementos da subtração: nesta, o maior valor do qual se retira o menor é chamado minuendo; o menor, subtraendo. O resultado da subtração é a diferença.

Assim, a diferença vale 4 e ela indica que o 4 (maior divisor comum) é contado uma vez. E esse 4 é o maior divisor comum de quatro, diferença, e 12, por exemplo.

Temos, portanto, um método para se encontrar o maior divisor comum de dois números, iniciais, efetuando-se subtrações sucessivas! Veja:

$$\begin{array}{c|c|c} 16 & 12 & 8 \\ 12 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 8 & 4 \end{array} \quad \text{(Subtrações sucessivas)}$$

Começamos subtraindo 12 de 16, obtendo 4; subtrai-se, agora, esse com o 12 (subtraendo anterior), resultando em 8; por fim, subtrai-se desse o 4 (subtraendo anterior), resultando em 4 novamente.

Comparando-se esse valor com o subtraendo anterior, percebe-se que são iguais; logo, 4 é o maior divisor comum de 16 e 12.

Tarefa nº 29. Use o método das subtrações sucessivas para encontrar o maior divisor comum de:

- 28 e 16.
- 36 e 18.
- 540 e 810.

Note que efetuar subtrações repetidas é o mesmo que fazer divisões (veja parte 1). Logo, podemos agilizar o método das subtrações sucessivas, efetuando-se divisões.

Por exemplo, vamos encontrar o maior divisor comum de 2904 e 1578.

$$\begin{array}{rrl} 1578) & 2904 & (1 \\ & 1578 & \\ \cline{2-2} & 1326 & \longleftarrow \text{(resto)} \end{array}$$

Observe que o resto 1326 é o valor da subtração de 2904 e 1578.

1326) 1 5 7 8 (1	252) 1 3 2 6 (5	(rascunho)
1 3 2 6	1 2 6 0	200 × 6 = 1200 ; 252 × 6 = 1512 (passou!)
2 5 2 (resto)	6 6 (resto)	252 × 5 = 1260

Observe que 66 é o resto obtido depois de 5 subtrações sucessivas com o subtraendo 252:

1326	1074	822	570	318
252	252	252	252	252
1074	822	570	318	66

Continuando:

66) 2 5 2 (3	54) 6 6 (1	12) 5 4 (4
1 9 8	5 4	4 8
5 4	1 2	6

(rascunho)

60	60	66	66
3	4	4	3
180	240	264 (passou)	198

De 2904 e 1578 chegamos na comparação de 6 (último resto) e 12 (último divisor); o que indica, obviamente, que o maior divisor comum é 6 (na divisão de 12 por 6 resulta em resto zero; então o maior divisor comum é 6); logo, 6 é o maior divisor comum de 2904 e 1578.

Esse método para se encontrar o maior divisor comum é conhecido como método de Euclides.

Tarefa nº 30. Use o método das divissões sucessivas para encontrar o maior divisor comum de:

- 3735 e 4815.
- 3618 e 1836. *(*)*
- 151 e 36.

11. *Euler: "A fim de julgar se uma dada fração pode ou não ser expressa por números menores, devemos procurar o maior divisor comum do numerador e do denominador. Agora, se encontrarmos 1 para o maior divisor comum, é uma indicação de que a fração não pode ser expressa por números menores. Mas se surgir outro maior divisor comum, a fração dada pode ser reduzida a números menores, a saber, se dividirmos o numerador e o denominador dados pelo maior divisor comum encontrado, pelo qual devemos ainda observar, que a fração, que nós obtivemos desta maneira, não pode ser reduzida ou simplificada mais, e consequentemente a partir disso a fração proposta é expressa por menores números [32]".*

Na regra 8, anterior, vimos que podemos representar uma fração por números mais simples.

Assim, se dividirmos o numerador e o denominador da fração pelo maior divisor comum obteremos números mais simples para ambos. Estes números terão como divisor comum o 1 (se não o fosse, não teríamos usado o maior divisor comum antes), o que indica que, aqui, a fração se tornou <u>irredutível</u>: não se pode mais encontrar números mais simples.

Vamos simplificar a fração $\frac{3080}{8547}$. Inicialmente calculemos o maior divisor comum:

```
3080) 8547 (2
      6160
      ----
      2387) 3080 (1
            2387
            ----
             693) 2387 (3
(resto vira novo divisor)  2079
                  ----
                   308) 693 (2
                        616
                        ---
                         77) 308 (4
                             308
                             ---
                               0
```

---

[32] *Um von einem vorgegebenen Bruche zu urtheilen, ob derselbe durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden könne oder nicht, so muss man von dem Zähler und Nenner desselben den grössten gemeinen Theüer suchen. Findet man nun 1 für den grössten gemeinen Theiler, so ist dasselbe ein Anzeigen, dass der Bruch durch kleinere Zahlen nicht ausgedrückt werden könne. Kommt aber ein anderer grösserer gemeiner Theiler heraus, so kann der vorgegebene Bruch in kleinere Zahlen gebracht werden, wann man nämlich den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs durchden gefundenen grössten gemeinen Theiler dividirt, wobei noch dieses zu merken ist, dass der Bruch, welchen man auf diese Weise erhält, nicht weiter verkleinert oder aufgehoben werden könne, und dadurch folglich der vorgelegte Bruch in den kleinesten Zahlen ausgedrücket werde. (pp. 187 - 188)*

De 8547 e 3080 alcançamos a comparação entre 308 e 77 cujo maior divisor comum é 77. Logo, 77 é o maior divisor comum de 8547 e 3080. Assim:

$$
\begin{array}{rl}
77) & 85|47 \quad (111 \\
 & 77 \\
\hline
 & \;\;84 \\
 & \;\;77 \\
\hline
 & \;\;\;\;77 \\
 & \;\;\;\;77 \\
\hline
 & \;\;\;\;\;\;0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
77) & 308|0 \quad (40 \\
 & 308 \\
\hline
 & \;\;\;0
\end{array}
$$

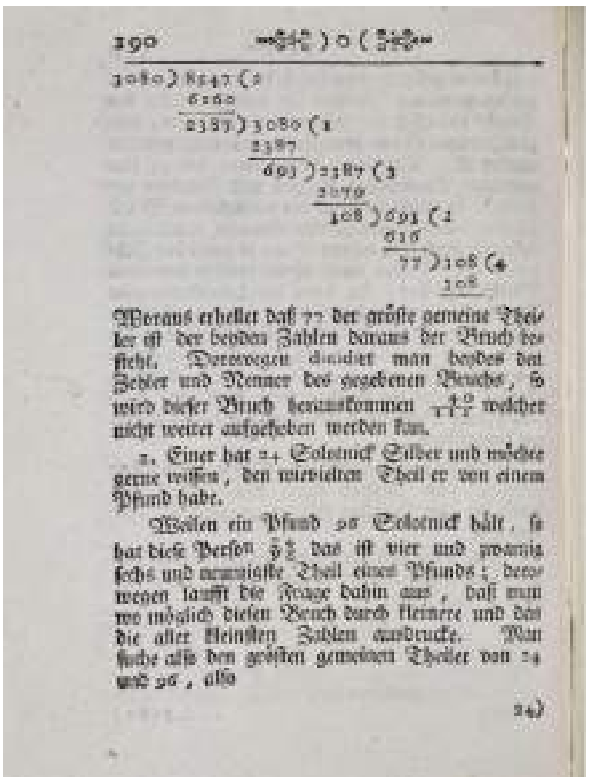
Portanto $\frac{3080}{8547}$ se reduz a $\frac{40}{111}$.

Observe que, aqui, o resto está recolocado, indicado no esquema da divisão, embaixo do dividendo. Essa maneira de escrever facilita o cálculo do maior divisor comum pois o resto se torna um divisor; o resto fica na posição de divisor como convencionalmente escrevermos: da esquerda para a direita e de cima para baixo, na folha. O cálculo se torna mais cômodo, portanto, e claro.

Tarefa nº 31. Simplifique as frações, encontrando o maior divisor comum: *(*)*

- $\frac{1079}{10375}$;
- $\frac{392}{13104}$;
- $\frac{2400}{9600}$.

Figura 3.3 – Detalhe da página no original em alemão (p. 190), onde se apresenta o esquema das divisões sucessivas para o cálculo do maior divisor comum para os números 3080 e 8547.


190)o(

3080) 8547 (2
6160
2387) 3080 (1
2387
693) 2387 (3
2079
308) 693 (2
616
77) 308 (4
308

Woraus erhellet daß 77 der gröste gemeine Theiler ist der beyden Zahlen daraus der Bruch besteht. Derowegen dividiret man beydes den Zehler und Nenner des gegebenen Bruchs, so wird dieser Bruch herauskommen $\frac{40}{111}$ welcher nicht weiter aufgehoben werden kan.

2. Einer hat 24 Solotnick Silber und möchte gerne wissen, den wievielten Theil er von einem Pfund habe.

Weilen ein Pfund 96 Solotnick hält, so hat diese Person $\frac{24}{96}$ das ist vier und zwanzig sechs und neunzigste Theil eines Pfunds; derowegen laufft die Frage dahin aus, daß man wo möglich diesen Bruch durch kleinere und die aller kleinsten Zahlen ausdrucke. Man suche also den grösten gemeinen Theiler von 24 und 96, also

24)

Fonte: DTA deutschestextarchiv.de

Encerramos, aqui, a parte 2 das tarefas didáticas para se atingir o objetivo: adição e subtração de frações.

Agora, uma vez que estas operações já foram suficientemente realizadas, resta ainda fornecer alguns exemplos para a resolução deste capítulo.

Tarefa nº 32. Exemplos: resolva os problemas

I. Alguém tem 24 *solotnick*[(33)] de prata e gostaria muito de saber quanto de uma libra tem. Nota: uma libra contém 96 *solotnick*.

II. Se tivéssemos encontrado esta fração $\frac{9222}{1740}$, e quiséssemos saber se o valor da mesma não pode ser expresso de forma mais simples, como procederíamos?

III. Qual é a menor forma possível para esta fração: $\frac{1640}{1776}$?

Parte 3: sobre a adição e subtração de números fracionários

1. *Euler: "Se uma fração pode ser adicionada a um número inteiro, então só temos que escrever a fração após o número inteiro. Da mesma forma, se um número inteiro junto com uma fração pode ser adicionado a outro número inteiro, então adicionamos os números inteiros e ainda anexamos a fração à soma total. Ao passo que, se subtrairmos um número inteiro de outro número inteiro maior junto com uma fração, devemos subtrarir os números inteiros, de modo que o número menor seja subtraído do número maior e a fração é adicionada ao resto*[(34)]*".*

Numa adição de números mistos, juntam-se partes inteiras com partes inteiras e partes fracionárias com partes fracionárias. Por exemplo: se 17 inteiros fossem acrescentados a 9 inteiros e $\frac{5}{12}$, teríamos 26 inteiros e $\frac{5}{12}$.

[(33)] Uma velha unidade de massa russa (em russo: *золотник*), equivalente a 0,1505 onças, ou 4,2658 gramas. Disponível em: https://it.wikipedia.org/wiki/Zolotnik. Acesso em: 15 de mar. 2021.

[(34)] *Wann zu einer ganzen Zahl ein Bruch addirt werden soll, so hat man nur den Bruch hinter die ganze Zahl zu schreiben. Gleickergestalt, wann zu einer ganzen Zahl eine ganze Zahl samt einem Brüche addirt werden soll, so addirt man die ganzen Zahlen zusammen, und an die Summe hängt man noch den Bruch an. Hingegen wann man von einer ganzen Zahl samt einem Brüche eine andere, kleinere, ganze Zahl abziehen soll, so wird die kleinere Zahl von der grösseren ganzen Zahl subtrahirt und an den Rest noch der Bruch gehängt. (p. 194)*

$$\begin{array}{r} 17 \\ 9 \\ \hline 26 \end{array}$$

Já para uma subtração de números mistos, retiramos daquele maior (minuendo) o valor do menor (subtraendo). Assim, se 9 inteiros fossem retirados de $26\frac{5}{12}$, teríamos como diferença $17\frac{5}{12}$.

Tarefa nº 33. Faça as adições e as subtrações de:

- 5 com $6\frac{5}{6}$;
- 4 com $3\frac{3}{7}$; *(*)*
- 10 com $2\frac{1}{2}$. *(*)*

Nos próximos tópicos veremos como adicionar as partes fracionárias.

2. *Euler: "Se duas ou mais frações, que devem ser adicionadas juntas, todas têm o mesmo denominador, então adicionamos os numeradores, e sob a soma, como numerador, colocamos o denominador comum; desde então essa fração será a soma verdadeira das frações apresentadas. Além disso, para esta fração encontrada, podemos aplicar as regras acima referidas para a redução das frações numa forma simples[(35)]".*

Observe que, neste caso de frações com mesmo denominador, adiciona-las não é mais do que encontrar quantas partes iguais devem estar contidas juntas. Por exemplo: $\frac{2}{25}, \frac{4}{25}$ e $\frac{6}{25}$ representam as partes de um todo que foi dividido em 25 partes iguais; então:

[(35)] *Wann zwei oder mehr Brücke, welche zusammen addirt werden sollen, einerlei Nenner haben, so addirt man die Zähler zusammen, und unter die Summe als einen Zähler setzt man den gemeinen Nenner; da dann dieser Bruch die wahre Summe der vorgelegten Brüche sein wird. Bei diesem gefundenen Bruche können ferner die oben gegebenen Regeln von Reducirung der Brücke in die einfaltigste Form, angebracht werden. (pp. 196 - 197)*

$\frac{2}{25}$ ← (duas partes de vinte e cinco)

$\frac{4}{25}$ ← (quatro partes de vinte e cinco)

$\frac{6}{25}$ ← (seis partes de vinte e cinco)

$\frac{12}{25}$ (doze partes de vinte e cinco; soma das partes tomadas antes)

Tarefa nº 34. Faça a soma das frações, escrevendo os resultados na forma mista, se necessário, e simplificando as partes fracionárias (veja parte 2), caso possível.

- $\frac{7}{30}, \frac{11}{30}, \frac{13}{30}$;
- $\frac{5}{48}, \frac{7}{48}, \frac{11}{48}, \frac{17}{48}, \frac{20}{48}$;
- $5\frac{4}{15}, 3\frac{7}{15}, 9\frac{8}{15}, \frac{1}{15}$;
- $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$.

3. *Euler: "Se de duas frações, que têm denominadores iguais, a menor é subtraída da maior, então tomamos a diferença do numerador menor do maior e colocamos o denominador comum abaixo do resto, cuja fração logo a seguir, fornece a fração procurada. Mas se de um número inteiro junto com uma fração, outro número inteiro com uma fração anexada deve ser subtraído, dos quais os denominadores das frações dadas são iguais, então a fração do menor número pode ser retirada da fração do maior número, e o número inteiro menor do maior número inteiro, se a fração do maior número for maior do que a fração do menor número. Mas se a fração do maior número for menor do que a fração do menor número, então um número inteiro do maior número deve ser retirado e adicionado à fração, a partir daí a subtração pode ser feita, mas a partir disso ou o número inteiro do maior é um menor, ou o número inteiro do menor pode ser considerado maior por um.*[36] *".*

---

(36) *Wann von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben, der kleinere von dem grösseren subtrahirt werden soll, so zieht man den kleineren Zähler von dem grösseren ab und setzt unter den Rest den gemeinen Nenner, welcher Bruch sodann den gesuchten Rest ausmacht. Soll aber von einer ganzen Zahl nebst einem Brüche eine andere ganze Zahl nebst einem Bruche, dessen Nenner des vorigen Bruchs Nenner gleich ist, subtrahirt werden, so wird der Bruch der kleineren Zahl von dem Bürche der grösseren, und die ganze kleinere Zahl von der ganzen grösseren subtrahirt, wann der Bruch der grössern Zahl grösser ist als der Bruch der kleineren Zahl. Ist aber der Bruch der grösseren Zahl kleiner als der Bruch der kleineren Zahl, so wird ein ganzes von der ganzen grösseren Zahl genommen und zu dem Brüche geschlagen, damit die Subtraction geschehen könne, hierauf aber entweder die ganze Zahl der grösseren um eins kleiner oder die ganze Zahl der kleineren um eins grösser angesehen. (pp. 201 - 202)*

Como antes, as frações representam tantas partes de um mesmo todo (denominadores iguais). Logo, subtraímos a fração menor da maior, ou seja, retiramos o menor número de tais partes da maior. Por exemplo, $\frac{4}{15}$ subtraído de $\frac{7}{15}$ sobra $\frac{3}{15}$, ou seja $\frac{1}{5}$.

$$\begin{array}{c|l} \frac{7}{15} & \longleftarrow \text{(sete partes de quinze)} \\ \frac{4}{15} & \longleftarrow \text{(quatro partes de quinze)} \\ \hline \end{array}$$

$\frac{3}{15}$ (diferença das partes: três partes de quinze)

Nota: o maior divisor comum de 3 e 15 é 3; logo, a fração é simplificada para $\frac{1}{5}$.

Nas representações de número misto, será maior aquele número cuja <u>parte</u> <u>inteira</u> é maior. Veja: 4 inteiros e $\frac{1}{3}$ são maiores do que 3 inteiros e $\frac{2}{3}$.

Não há dificuldades na subtração se a parte fracionária de um número misto, maior que outro, também for maior que a sua parte fracionária. Por exemplo,

$$3\frac{2}{5} \text{ subtraída de } 7\frac{4}{5} \text{ resulta } 4\frac{2}{5}$$

O detalhe está quando a parte fracionária do maior número misto for <u>menor</u> que a parte fracionária do outro número misto, menor. Nesse caso, como se faz na subtrações de inteiros, retiramos uma unidade da parte inteira e juntamos ao numerador da fração menor, com os devidos ajustes (veja nestas tarefas didáticas, regra 7 da parte 2); por exemplo:

$$11\frac{4}{5} \text{ subtraído de } 16\frac{3}{5}$$

Como $\frac{3}{5}$ é menor do que $\frac{4}{5}$, retiramos uma unidade (um, inteiro) de 16, o que equivale a $\frac{5}{5}$ (observe o mesmo denominador) e juntamos $\frac{5}{5}$ com $\frac{3}{5}$, resultando em $\frac{8}{5}$.

Então, de:

$11\frac{4}{5}$ subtraído de $16\frac{3}{5}$ passamos para $11\frac{4}{5}$ subtraído de $15\frac{8}{5}$ que resulta $4\frac{4}{5}$

$$\begin{array}{r|l} 16\frac{3}{5} & 15\frac{8}{5} \\ 11\frac{4}{5} & 11\frac{4}{5} \\ \hline & 4\frac{4}{5} \end{array}$$

$4\frac{4}{5}$ (diferença)

Tarefa nº 35. Faça as subtrações:

- $\frac{5}{12}$ de $\frac{7}{12}$;
- $\frac{12}{30}$ de $\frac{17}{30}$;
- $5\frac{13}{21}$ de $10\frac{16}{21}$;
- $69\frac{11}{30}$ de $127\frac{19}{30}$; *(*)*
- $209\frac{25}{36}$ de $347\frac{17}{36}$; *(*)*
- $110\frac{11}{80}$ de $220\frac{9}{80}$. *(*)*

4. *Euler: "Um número divisível comum (<u>communis dividuus</u>) de dois ou mais números dados é um tal número que pode ser dividido por cada um dos números dados, sem deixar um resto. Agora, se dois ou mais números são dados, então esse número divisível comum é encontrado, se multiplicarmos os números dados um pelo outro. Outros números divisíveis comuns semelhantes são encontrados, se multiplicarmos o primeiro encontrado por um número arbitrário; do que se segue, que de dois ou mais números dados muitos números divisíveis comuns podem ser encontrados(37)".*

Observemos os seguintes números: 2, 3 e 5; assim, se multiplicarmos todos teremos como produto o valor 30, que é um número divisível comum (hoje, chamamos de múltiplo comum). Ainda: se multiplicarmos 30 por 2, 3, 4, 5 ou 6, por exemplo, encontraremos 60, 90, 120, 150 e 180, que também serão múltiplos comuns de 2, 3 e 5.

(37) *Eine gemeine theilbare Zahl (communis dividuus) von zweien oder mehr gegebenen Zahlen ist eine solche Zahl, welche sich durch eine jegliche der gegebenen Zahlen ohne Rest theilen lasst. Wann nun zwei oder mehr Zahlen gegeben sind, so wird eine solche gemeine theilbare Zahl gefunden, wann man die gegebenen Zahlen mit einander multiplicirt. Mehr dergleichen gemeine theilbare Zahlen werden gefunden, wann man die erst gefundene mit einer jeglichen beliebigen Zahl multiplicirt; woraus folget, dass von zwei oder mehr gegebenen Zahlen unendlich viel gemeine theilbare Zahlen gefunden werden konnen. (p. 206)*

Tarefa nº 36. Encontre três números divisíveis comuns (múltiplos comuns) para:

- 6, 7 e 8.
- 2, 5, 7, 9 e 11.
- 2, 4, 6 e 9.

Dica: podemos encontrar números divisíveis comuns menores do que sugerido pela regra. Observe duplas de números individualmente e seus produtos; por exemplo, 6 e 9, multiplicados resultam em 54. No entanto, 36 é um número divisível comum de 6 e 9, menor do que 54.

5. *Euler: "O menor número divisível comum (Minimus communis dividuus) de dois números será encontrado se inicialmente procurarmos pelo maior divisor comum deles, e depois disso o produto de ambos os números será dividido por aquele; ou o que resulta no mesmo: dividimos um número pelo maior divisor comum encontrado e multiplicamos o outro número por aquele resultado, pois então o produto será o menor número divisível comum. Mas se surgirem mais de dois números, buscamos inicialmente o menor divisível comum de dois; doravante tomamos este resultado e o terceiro número dado e buscamos destes novamente o menor divisível comum; mais uma vez a partir deste número e do quarto número dado, e procedemos assim, até que tenhamos passado por todos os números dados: desde então, o último número encontrado será o menor divisível comum de todos os números dados.[38]"*

Considere o seguinte: número divisível (múltiplo comum) de um número é o produto deste por outro inteiro.

Na regra anterior vimos que o produto de dois números resulta num número divisível comum a eles. Assim, se dividirmos esse produto por um divisor comum qualquer, o resultado será um número divisível comum menor do que aquele gerado pelo produto dos dois números dados.

Observe que um divisor comum que divida o produto de dois números, divide um dos números (pois é divisor), gerando um número inteiro que multiplica o outro número. E isso é o que consideramos, no início, como número divisível!

Assim, quanto maior o divisor comum usado para dividir o produto dos dois números dados, menor será o valor do número divisível comum.

---

[38] *Die kleinste gemeine theilbare Zahl (Minimus communis dividuus) von zweien Zahlen wird gefunden, wann man erstlich den grössten gemeinen Theiler davon sucht, und hernach das Product der beiden Zahlen dadurch dividirt; oder welches gleich viel: man dividirt die eine Zahl durch den gefundenen grössten gemeinen Theiler, und mit dem Quoto multiplicirt man die andere Zahl, da dann das Product die kleinste germeine theilbare Zahl sein wird. Sind aber mehr als zwei Zahlen vorgegeben, so sucht man erstlich von zweien davon die kleinste gemeine theilbare Zahl; hernach nimmt man diese und die dritte der gegebenen Zahlen zusammen und sucht davon wiederum die kleinste [gemeine] theilbare Zahl; ferner wiederum von dieser und der vierten gegebenen Zahl, und fahrt also fort, bis man alle gegebenen Zahlen durchgegangen: da dann die letzt gefundene Zahl die kleinste gemeine theilbare Zahl aller gegebenen sein wird. (p. 210)*

Portanto, no caso em que dividimos o produto dos dois números, dados no início, pelo maior divisor comum, vamos obter o menor número divisível comum (hoje, chamamos de mínimo múltiplo comum) dos dois números dados.

Concluímos que o produto de dois números inteiros é tanto quanto o produto do maior divisor comum destes pelo menor número divisível comum deles.

Disso, tiramos um método prático para se encontrar o menor número divisível comum de dois números.

Veja o exemplo: considere os números 9 e 15. Temos o seu produto: 135, e pelo método das divisões sucessivas, seu maior divisor comum é 3:

```
9)  1 5  (1
     9
   ----
    6)  9  (1
        6
       ---
        3
```

Logo, o menor número divisível comum vale 135 dividido por 3, ou seja, 45:

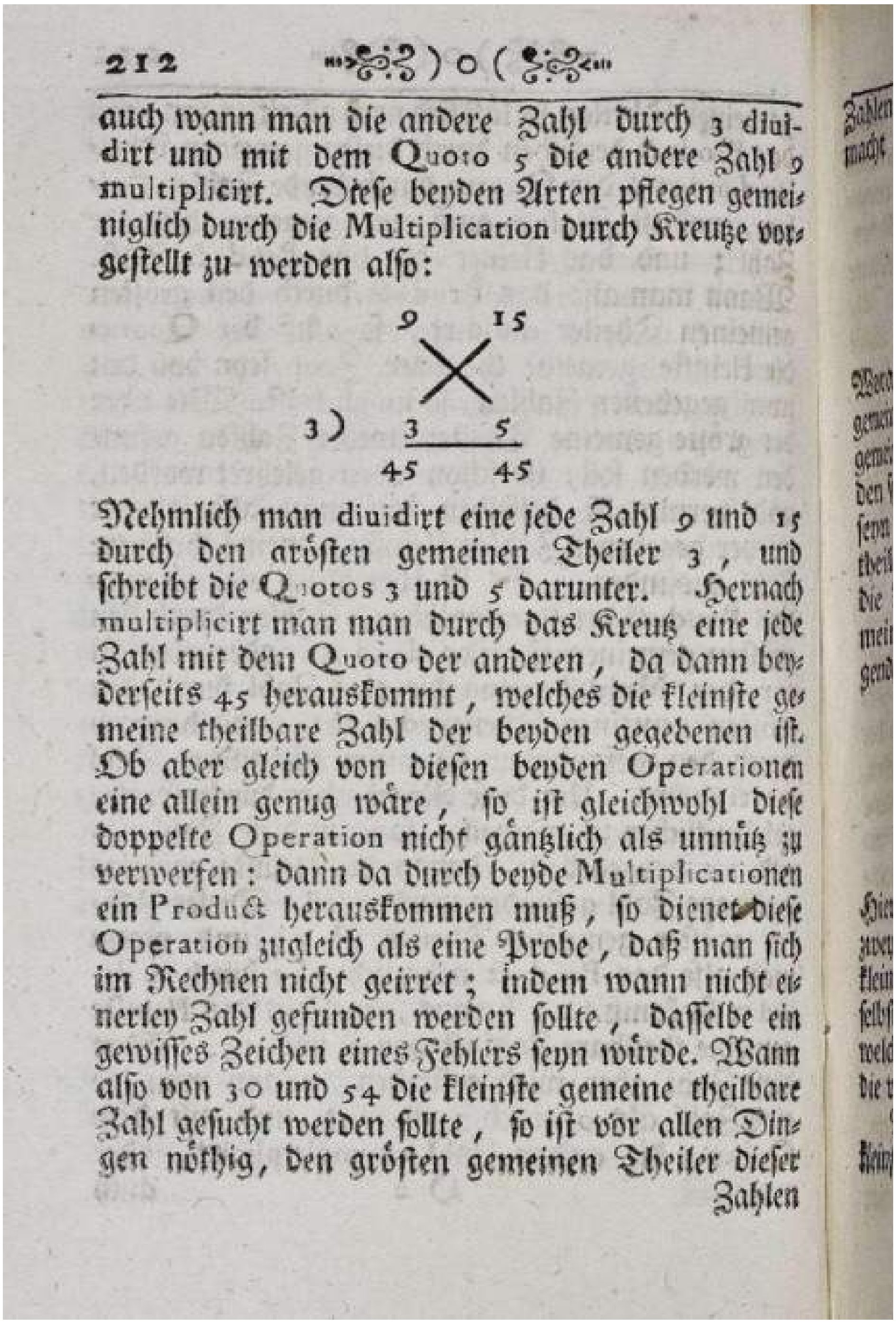
```
        1
3)  1 3 5   (0
   -------
    45  ◄— (quociente)
```

Poderíamos resumir o processo escrevendo 9 e 15, um ao lado do outro e, embaixo, o quociente destes pelo maior divisor comum: a multiplicação cruzada deve resultar no menor número divisível comum (como num teste, pois na multiplicação cruzada, os produtos devem ser iguais).

```
(maior divisor comum) —► 3)  9        15  ◄———— (números dados)
                               \    /
                                 X
                               /    \
                             3        5  ◄— (quocientes da divisão pelo maior
                            ------------        divisor comum)
                             45      45
```

(na multiplicação cruzada: 9 por 5 resulta tanto quanto 3 por 15, indicando o valor correto para o menor número divisível comum).

Figura 3.4 – Detalhe na página no original em alemão (p. 212), onde se apresenta o esquema da multiplicação cruzada para o cálculo do menor número divisível comum de 9 e 15.



212)o(

auch wann man die andere Zahl durch 3 dividirt und mit dem Quoto 5 die andere Zahl 9 multiplicirt. Diese beyden Arten pflegen gemeiniglich durch die Multiplication durch Kreutze vorgestellt zu werden also:

$$\begin{array}{cccc} & 9 & & 15 \\ & & \times & \\ 3) & 3 & & 5 \\ \hline & 45 & & 45 \end{array}$$

Nehmlich man dividirt eine jede Zahl 9 und 15 durch den grösten gemeinen Theiler 3, und schreibt die Quotos 3 und 5 darunter. Hernach multiplicirt man man durch das Kreutz eine jede Zahl mit dem Quoto der anderen, da dann beyderseits 45 herauskommt, welches die kleinste gemeine theilbare Zahl der beyden gegebenen ist. Ob aber gleich von diesen beyden Operationen eine allein genug wäre, so ist gleichwohl diese doppelte Operation nicht gänzlich als unnütz zu verwerfen: dann da durch beyde Multiplicationen ein Product herauskommen muß, so dienet diese Operation zugleich als eine Probe, daß man sich im Rechnen nicht geirret; indem wann nicht einerley Zahl gefunden werden sollte, dasselbe ein gewisses Zeichen eines Fehlers seyn würde. Wann also von 30 und 54 die kleinste gemeine theilbare Zahl gesucht werden sollte, so ist vor allen Dingen nöthig, den grösten gemeinen Theiler dieser

Zahlen

Fonte: DTA deutschestextarchiv.de

Outro exemplo: vamos encontrar o menor número divisível comum de 30 e 54.

Calculemos inicialmente o maior divisor comum; depois, montemos o esquema (algoritmo) da multiplicação cruzada!

```
30)  5 4    (1
     3 0
    -----
     2 4)  3 0   (1
           2 4
          -----
             6
```

(maior divisor comum)

```
6)  30       54

     5        9
  -----------------
   270      270
```

(menor número divisível comum)

Temos que o menor número divisível comum de 30 e 54 é 270.

Outro exemplo *(*)*: vamos encontrar o menor número divisível comum de 320 e 180.

```
180)  3 2 0   (1
      1 8 0
     -------
      1 4 0)  1 8 0   (1
              1 4 0
             -------
                4 0)  1 4 0   (3
                      1 2 0
                     -------
                        2 0
```

(maior divisor comum) 2 0

```
20)  180       320

       9        16
  ------------------
    2880      2880
```

(menor número divisível comum)

O menor número divisível comum de 320 e 180 é 2880.

Tarefa nº 37. Encontre o menor número divisível comum de:

- 160 e 520. *(*)*
- 180 e 800. *(*)*
- 72 e 60. *(*)*

Vamos calcular, agora, o menor número divisível comum (mínimo múltiplo comum) de mais de dois números: 4, 5, 6, 9, 10 e 16. Façamos de dois em dois.

Observe 4 e 16: 16 é o menor número divisível comum; assim, eliminamos o 4.

Observe 5 e 10: 10 é o menor número divisível comum; excluímos o 5 do grupo.

Considere o 6 e o 9: o maior divisor comum é 3; logo, o menor número divisível comum vale 18.

6) 9 (3 (resto: maior divisor comum)

1

3) 6 9

2 3

18 18

(menor número divisível comum)

Temos, portanto, remanescentes: 10, 16 e 18.

Observe 10 e 16: o maior divisor comum vale 2; logo, 80 é o menor número divisível comum.

10) 1 6 (1

1 0

6) 1 0 (1

6

4) 6 (1

4

2

(maior divisor comum)

2) 10 16

5 8

80 80

(menor número divisível comum)

Temos, agora, 18 e 80. O maior divisor comum vale 2; logo, 720 é o menor número divisível comum, que também o será do grupo inicial: 4, 5, 6, 9, 10 e 16.

18) 8 0 (4 7 2 8) 1 8 (2 1 6 2 (maior divisor comum)	2) 18 80 9 40 720 720 (menor número divisível comum)

Resumindo:

~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~16~~

~~18~~ ~~80~~

720 ← menor múltiplo comum

Tarefa nº 38. Encontre o menor número divisível comum de:

- 6, 8, 9, 12, 15, 20, 25.
- 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
- 11, 12, 13, 14, 15, 16. *(*)*

6. *Euler: "Duas ou mais frações, que têm denominadores desiguais, podem, da seguinte forma, ser transformadas em outras de igual valor, cujos denominadores são iguais. Em primeiro lugar, pegamos todos os denominadores das frações dadas e encontramos a partir deles o menor número divisível comum, que é considerado como o denominador comum de todas as frações. Depois de fazermos isto, dividimos esse denominador comum por cada denominador de todos os denominadores dados, e então multiplicamos os quocientes pelos numeradores dados; assim, esses produtos dão os numeradores das frações procuradas. Assim, transformamos as frações fornecidas em outras, que ainda são iguais aos valores dados e, portanto, têm o mesmo denominador*[(39)]*".*

(39) *Zwei oder mehr Brücke, welche ungleiche Nenner haben, werden folgendergestalt in andere gleiches Inhalts verwandelt, deren Nenner gleich sind. Erstlich nimmt man alle Nenner der gegebenen Brücke und sucht davon die kleinste gemeine theilbare Zahl, welche für den gemeinen Nenner aller Brücke, in welche die gegebenen Brücke verwandelt wérden sollen, angenommen wird. Hernach dividirt man diesen gemeinen Nenner durch einen jeglichen Nenner der gegebenen Brücke, und mit den Quotis multiplicirt man die dahin gehörigen Zähler; so geben diese Producte die Zähler der gesuchten Brücke. Auf diese Art verwandelt man also die gegebenen Brücke in andere, welche den gegebenen dem Werthe nach gleich sind und dabei gleiche Nenner haben.(p. 218)*

Vimos, na regra 8 da parte 2 que: "*Uma fração mantém o seu valor inalterado, se multiplicarmos tanto o denominador como o numerador por um número arbitrário. E da mesma forma uma fração mantém o seu verdadeiro valor, se dividirmos tanto o numerador como o denominador por um número arbitrário",* ressaltando, na divisão, que esse número inteiro é um divisor comum do numerador e denominador.

Exemplos: $\frac{3}{4}$ é tanto quanto $\frac{9}{12}$, pois multiplicaram-se numerador e denominador por 3. E $\frac{35}{50}$ é tanto quanto $\frac{7}{10}$, pois foram divididos numerador e denominador por 5, divisor comum.

Vamos, então, passar as frações $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{5}$ para um mesmo denominador. Devemos encontrar o menor número divisível comum dos denominadores e observar os quocientes deste com os denominadores dados. Esses quocientes, correspondentes a cada fração, vão multiplicar seus respectivos numeradores, terminado, assim, por ajustarem-se as frações ao que se deseja, ou seja, ao mesmo valor de denominador.

Os denominadores são: 3, 4 e 5.

Considerando-se 3 e 4, seu menor número divisível comum é 12. Agora, 12 e 5 indicam um menor número divisível comum igual a 60.

Dividamos, agora, o menor número divisível comum 60 por 3, 4 e 5:

	2	1
3) 6 0 (0	4) 6 0 (0	5) 6 0 (0
2 0	1 5	1 2
(quociente)	(quociente)	(quociente)

Logo, devemos multiplicar os numeradores 2, 3 e 1 por 20, 15 e 12, respectivamente: 40, 45 e 12 são os novos numeradores.

Portanto, de $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{5}$ teremos estas frações equivalentes respectivamente: $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$ e $\frac{12}{60}$.

Esta operação é chamada de <u>redução de frações ao mesmo denominador</u>.

Tarefa nº 39. Reduza as seguintes frações de cada item ao mesmo denominador:

- $\frac{5}{12}, \frac{8}{15}, \frac{7}{20}, \frac{4}{21}$;
- $\frac{13}{63}, \frac{22}{105}, \frac{103}{140}$;
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$.

Estamos nos aproximando de nosso objetivo: a adição e subtração de frações.

A próxima e derradeira regra apresenta qual é o procedimento para tal.

7. *Euler:"Se tanto as frações simples quanto os números inteiros tomados juntos com as frações devem ser somados ou subtraídos, então antes de tudo, as frações devem ser colocadas em denominadores iguais ou transformadas em outras para terem o mesmo denominador. Doravante, a adição ou subtração pode ser realizada, como já foi ensinado acima com as frações, cujos denominadores são iguais. A saber, para a adição devemos adicionar os numeradores das frações encontradas, e sob a soma como um numerador, o denominador comum a ser escrito, cuja fração indica a soma das frações. Agora, se esta fração é maior do que um número inteiro, então os números inteiros devem ser tirados dessa, e, então, os números inteiros tomados para serem somados, para serem anexados à mesma soma. Mas na subtração o numerador da fração abaixo seria tirado do numerador da fração acima*[40]*, desde que a mesma seja menor; mas se o outro numerador for maior, a fração acima será aumentada por um número inteiro e a subtração será realizada*[41]*".*

Nas regras 2 e 3 imediatamente anteriores, percebemos que para se adicionarem, ou subtraírem, frações, elas devem ter o mesmo denominador comum.

Assim, vamos aplicar o que foi visto na regra 6, anterior, para reduzir frações ao mesmo denominador e, depois, operá-las: seja adição, ou subtração a executar!

Vamos adicionar: $\frac{3}{5}, \frac{1}{6}$ e $\frac{7}{15}$.

[40] Neste trecho, Euler está se referindo ao esquema da subtração apresentado logo abaixo, isto é, o numerador da fração abaixo é o subtraendo e o numerador da fração acima é o minuendo.

[41] *Wann sowohl einzele Brücke als ganze Zahlen samt Brüchen entweder zusammen addirt oder von einander subtrahirt werden sollen, so werden vor allen Dingen die Brücke zu gleichen Nenneren gebracht oder in andere verwandelt, so gleiche Nenner haben. Hernach wird die Addition oder Subtraction verrichtet, wie schon oben ist gelehret worden mit Brüchen, deren Nenner gleich sind. Nämlich bei der Addition werden die Zähler der gefundenen Brücke zusammen addirt, und unter die Summe als einen Zähler der gemeine Nenner geschrieben, welcher Bruch die Summe der Brücke anzeiget. Ist nun dieser Bruch grösser als ein ganzes, so werden die ganzen daraus gezogen, und so noch ganze Zahlen zu addiren da sind, mit zu derselben Summe geschlagen. In der Subtraction aber würd der Zähler des unteren Bruchs von dem Zähler des oberen Bruchs subtrahirt, wofern derselbe kleiner ist; sollte der untere Zähler aber grösser sein, so wird der obere Bruch um ein ganzes vermehret und sodann die Subtraction vollzogen.(pp. 224 - 225)*

$\frac{3}{5}$	$\frac{18}{30}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{30}$
$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{30}$

Adição: $\frac{37}{30}$ que vale $1\frac{7}{30}$

(rascunhos)

$\cancel{5}$ 6 15

30

6) 1 5 (2
1 2
3

3) 6 15

2 5

30 30

(menor número divisível comum)

Logo, a soma de $\frac{3}{5}, \frac{1}{6}$ e $\frac{7}{15}$ vale 1 inteiro e $\frac{7}{30}$.

Embora todas as novas frações tenham um único denominador comum, por uma questão de brevidade, vamos estabelecer todos os numeradores e o denominador comum apenas para serem anotados à parte[...].

Vamos adicionar, agora:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{1}{8}, \frac{2}{9}.$$

Inicialmente, calculemos o denominador comum:

$\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ $\boxed{5}$ 6 $\boxed{7}$ 8 9

$\boxed{35}$ 18

72

2520

O denominador comum vale 2520.

Rascunho comentado:

- De imediato, observe 2, 4 e 8: o menor número divisível comum é 8.
- Ainda: observe 3 e 9: o menor número divisível comum é 9.
- Observe 6 e 9: o menor número divisível comum é 18.
- Observe 5 e 7: menor número divisível comum é 35.
- Temos, então, remanescentes: 8, 18 e 35.
- Vejamos 8 e 18: o menor número divisível comum é 72.

Assim, no final, devemos analisar 35 e 72; observe que o maior dividor comum é 1. Logo, o menor número divisível comum será o produto deles: 2520.

35) 7 2 (2
7 0
2) 3 5 (17
3 4
1
(maior divisor comum)

Agora, vamos ajustar os numeradores. Para tanto, devemos encontrar o quociente respectivos para cada fração, cujos denominadores iniciais são: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

- 2520 é o denominador comum:

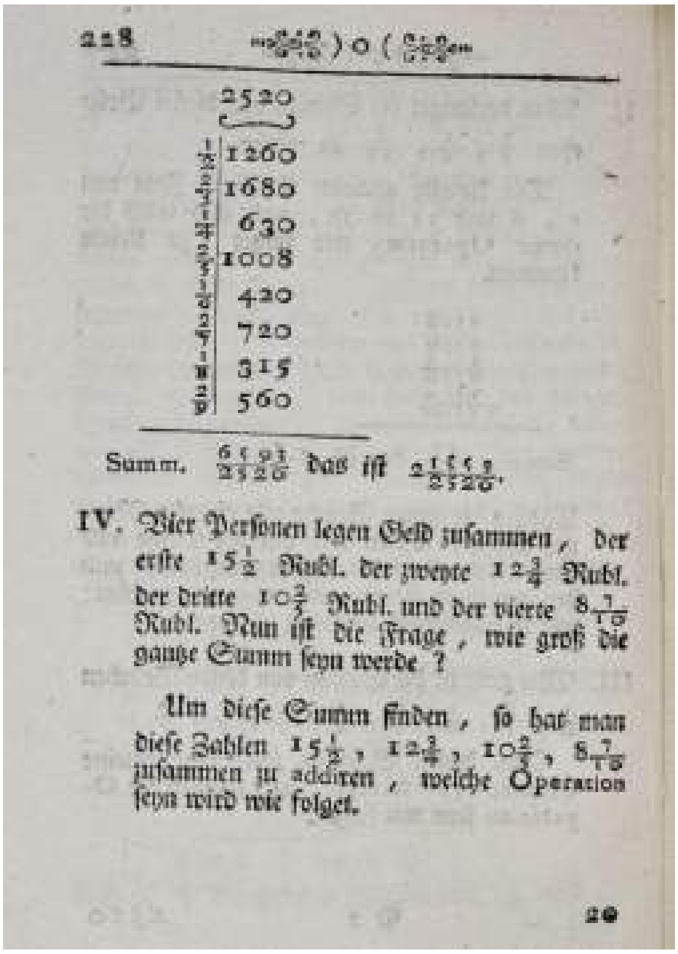
1 2) 2 5 2 0 (0 1 2 6 0	1 3) 2 5|2 0 (0 8 4 0 2 1 6 8 0 (novo numerador)	1 4) 2 5|2 0 (0 6 3 0	5) 2 5|2 0 (0 5 0 4 2 1 0 0 8 (novo numerador)
1 6) 2 5|2 0 (0 4 2 0	4 7) 2 5|2 0 (0 3 6 0 2 7 2 0 (novo numerador)	1 4 8) 2 5|2 0 (0 3 1 5	7 9) 2 5|2 0 (0 2 8 0 2 5 6 0 (novo numerador)

Montemos o esquema da soma com a brevidade mencionada:

	2520 ←	(denominador comum)
$\frac{1}{2}$	1260	
$\frac{2}{3}$	1680	
$\frac{1}{4}$	630	
$\frac{2}{5}$	1008	(novos numeradores a somar)
$\frac{1}{6}$	420	
$\frac{2}{7}$	720	
$\frac{1}{8}$	315	
$\frac{2}{9}$	560	

Adição: $\frac{6593}{2520}$ que equivale a $2\frac{1553}{2520}$.

Figura 3.5 – Detalhe da página no original em alemão (p. 228), onde se apresenta o cálculo da soma das frações anteriormente exemplificadas, na forma esquemática.



228

	2520
$\frac{1}{2}$	1260
$\frac{2}{3}$	1680
$\frac{1}{4}$	630
$\frac{2}{5}$	1008
$\frac{1}{6}$	420
$\frac{2}{7}$	720
$\frac{1}{8}$	315
$\frac{2}{9}$	560

Summ. $\frac{6593}{2520}$ das ist $2\frac{1553}{2520}$.

IV. Vier Personen legen Geld zusammen, der erste $15\frac{1}{2}$ Rubl. der zweyte $12\frac{3}{4}$ Rubl. der dritte $10\frac{2}{5}$ Rubl. und der vierte $8\frac{7}{10}$ Rubl. Nun ist die Frage, wie groß die ganze Summ seyn werde?

Um diese Summ finden, so hat man diese Zahlen $15\frac{1}{2}$, $12\frac{3}{4}$, $10\frac{2}{5}$, $8\frac{7}{10}$ zusammen zu addiren, welche Operation seyn wird wie folget.

20

Fonte: DTA deutschestextarchiv.de

Tarefa nº 40. Calcule a adição de: *(*)*

- $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}$;
- $\frac{1}{14}, \frac{3}{15}, \frac{5}{16}$;
- $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}$.

Vamos, agora, subtrair:

$$23\frac{13}{30} \text{ de } 49\frac{8}{105}$$

- cálculo do denominador comum:

30) 1 0 5 (3
9 0
15
(maior divisor comum)

15) 30 105
2 7
210 210
(menor número divisível comum)

O denominador comum é 210.

- cálculo dos quocientes para ajustarem numeradores.

30) 2 1 0 (0
7
13
91
(novo numerador)

105) 2 1 0 (0
2
8
16
(novo numerador)

- cálculo da subtração.

$49\frac{8}{105}$	$\frac{16}{210}$	$\frac{226}{210}$
$23\frac{13}{30}$	$\frac{91}{210}$	$\frac{91}{210}$

Diferença: $25\frac{135}{210}$ que equivale a $25\frac{9}{14}$

Observe que a fração minuendo era menor do que a subtraendo; logo, retiramos uma unidade da parte inteira 49, que corresponde a $\frac{210}{210}$, e a somamos com o $\frac{16}{210}$, resultando em $\frac{226}{210}$.

Assim, subtraímos $\frac{91}{210}$ de $\frac{226}{210}$, resultando em $\frac{135}{210}$ que foi simplificado para $\frac{9}{14}$.

Tarefa nº 41. Calcule as subtrações:

- $25\frac{9}{14}$ de $30\frac{7}{26}$; *(*)*
- $\frac{9}{72}$ de $1\frac{1}{38}$; *(*)*
- $5\frac{4}{70}$ de $13\frac{1}{26}$.

Tarefa nº 42. Exemplo: resolva os problemas. *(*)*

Nota: os problemas a seguir foram criados, usando-se a temática e a maneira como Euler apresentava.

I. A questão é: quanto vale $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ adicionados?

II. Quatro pessoas depositaram algum dinheiro em conjunto:

* o primeiro $15\frac{1}{2}$ rublos;

* o segundo $15\frac{3}{4}$ rublos;

* os terceiro $10\frac{2}{5}$ rublos;

* o quarto $8\frac{7}{10}$ rublos.

Agora, a questão é: qual é o montante total a ser recebido?

III. Qual é o valor da soma das frações:

$$217\frac{32}{76},\ 340\frac{28}{45},\ 425\frac{40}{63}?$$

IV. Gostaríamos de saber o que resta se $\frac{1}{3}$ for retirado de $\frac{3}{5}$.

V. Qual é a diferença entre $\frac{12}{17}$ e $\frac{29}{41}$?

VI. Qual é o resultado da diferença entre:

$$3\frac{7}{12} \text{ e } 1\frac{4}{9}?$$

VII. Gostaríamos de saber a partir destas duas frações: $\frac{13}{21}$ e $\frac{55}{89}$, qual será a maior e, também, por essa razão, quanto vale a diferença.

Chegamos até aqui. Alcançamos o objetivo! Parabéns!

CAPÍTULO 4: COMPARAÇÃO DE CONTEÚDOS – MÉTODO DE EULER E LIVROS DO PNLD

A necessidade de se conhecer o tratamento operacional com as frações (inicialmente no que diz respeito à adição e à subtração das mesmas) é de suma importância, como vimos, não só pelo cuidado que Leonhard Euler apresentou sobre o assunto, no seu livro, mas também por ter importância na continuidade dos estudos futuros.

O manejo com as frações se faz presente no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, ferramenta matemática básica nos cursos de Engenharia; e, nela, existem questões onde somar frações representa calcular primitivas em integrais; por exemplo, temos a relação muito útil: existem A e B tais que,

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} \tag{4.1}$$

com α, β, m e n, constantes, se e somente se,

$$A = \frac{m\alpha + n}{\alpha - \beta} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{m\beta + n}{\beta - \alpha} \text{ , com } \alpha \neq \beta \quad \text{(I)} \tag{4.2}$$

o que permite encontrar rapidamente a primitiva de, por exemplo:

$$\int \frac{2x+3}{x(x-2)} dx \tag{4.3}$$

$$\int \frac{2x+3}{x(x-2)} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{x-2} dx \overset{(I)}{\Rightarrow} \int \frac{2x+3}{x(x-2)} dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x-2} \Leftrightarrow \tag{4.4}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{2x+3}{x(x-2)} dx = -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{7}{2}\ln|x-2| + k \tag{4.5}$$

O resultado de (I) passa pelo uso da adição de frações!

Sabemos que o manejo com as frações traz maior clareza para o entendimento e a aprendizagem de assuntos mais avançados em Matemática, como no exemplo apresentado para se resolver um problema de Cálculo Diferencial e Integral (acima). No Ensino Médio não é diferente:

considere os seguintes dados, sen(x) = $\frac{3}{5}$ e cos(y) = $\frac{5}{13}$; calculemos cos(x + y), sabendo-se que x está no primeiro quadrante e y, no quarto quadrante do ciclo trigonométrico.

A resolução desse problema de Trigonometria, visto comumente no Ensino Médio, perpassa pela adição de frações; inicialmente calculamos o valor do cos(x):

$$\cos(x) = +\sqrt{1 - sen^2(x)} \overset{sen(x)=\frac{3}{5}}{\Rightarrow} \cos(x) = +\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \tag{4.6}$$

Em seguida, calculamos sen(y);

$$sen(y) = -\sqrt{1 - \cos^2(y)} \overset{\cos(y)=\frac{5}{13}}{\Rightarrow} sen(y) = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13} \tag{4.7}$$

Finalmente, pela expressão reconhecida de cos(x + y) – cosseno da soma de dois ângulos, encontramos a resposta:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - sen(x)\cdot sen(y) \Rightarrow \cos(x+y) = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{(-12)}{13} = \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65} \tag{4.8}$$

que passa também pela adição de frações!

Assim, o aprendizado das operações com frações deve ser um tema relevante e presente nos currículos da Educação Básica, não só das redes públicas, explorando-se tudo a respeito: todas as dificuldades e critérios de resolução de problemas.

De fato, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[42] menciona na área específica de Matemática (Matemática e suas Tecnologias) a importância em se tratar com os números e suas operações:

> Em relação aos números, os estudantes do Ensino Fundamental têm a oportunidade de desenvolver habilidades referentes ao pensamento numérico, ampliando a compreensão a respeito dos diferentes campos e significados das operações. Para isso, propõe-se a resolução de problemas envolvendo números naturais, inteiros, racionais e reais, em diferentes contextos (do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento) (BRASIL, 2018, p. 527).

Na rede pública municipal, para o presente ano na cidade de São Paulo, temos a orientação

[42] Conforme definido na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), a Base deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 05 de ago. 2021.

dada pelo Currículo da Cidade, para a área de Matemática, no Ensino Fundamental, EJA (Educação de Jovens e Adultos) e Educação Infantil. Desenvolvida por meio de conferências e encontros com educadores durante o ano de 2017, foi instituída em 2018 e segue até hoje como fonte de consulta para a orientação no ensino de Matemática na rede pública municipal:

> Em 2018, a Secretaria Municipal de Educação (SME) deu início ao processo de implementação – na Rede Municipal de Ensino de São Paulo – do Currículo da Cidade para o Ensino Fundamental, que foi elaborado a muitas mãos pelos profissionais da nossa Rede, ao longo do ano de 2017. Resultado de um trabalho dialógico e colaborativo, o Currículo teve a participação dos nossos estudantes por meio de um amplo processo de escuta, que mapeou anseios e recomendações sobre o quê e como eles querem aprender (CURRÍCULO DA CIDADE, 2019, p. 5).

Dentro das ditas áreas de conhecimento (Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas, assim descritas pelo Currículo da Cidade), há a separação daquilo que se deseja trabalhar no ensino e na aprendizagem, cujos temas e assuntos foram elencados durante os trabalhos de conferência e encontros dos educadores em 2017.

Temos os objetos de conhecimento, agrupados por eixos articuladores, cujos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento são apresentados seguindo o código, por exemplo, EF06M08, o qual seria entendido como: EF, Ensino Fundamental; 06, 6º ano; e M08, Matemática, objetivo de aprendizagem nº 8.

Os objetos de conhecimento são "*elementos orientadores do currículo e têm a finalidade de nortear o trabalho do professor, especificando de forma ampla os assuntos a serem abordados em sala de aula*" (CURRÍCULO DA CIDADE, 2019, p. 46).

Já os eixos articuladores organizam os objetos de conhecimento de cada componente curricular agrupando o que os professores precisam ensinar em cada ano do Ensino Fundamental.

Os objetivos de aprendizagem são assim descritos pelo Currículo da Cidade:

> O Currículo da Cidade optou por utilizar a terminologia Objetivos de Aprendizagem e Desenvolvimento para designar o conjunto de saberes que os estudantes da Rede Municipal de Ensino devem desenvolver ao longo do Ensino Fundamental. A escolha busca contemplar o direito à educação em toda a sua plenitude – Educação Integral – considerando que a sua conquista se dá por meio de "um processo social interminável de construção de vida e identidade, na relação com os outros e com o mundo dos sentidos". (SÃO PAULO, 2016a, p. 29 *apud* CURRÍCULO DA CIDADE, 2019, p. 47).

Para Matemática no 6º ano do Ensino Fundamental temos no eixo articulador intitulado Número, separado no grupo objetos de conhecimento Múltiplos e Divisores e classificado com os códigos EF06M08 e EF06M09, o assunto sobre frações e suas operações de adição e subtração:

> (EF06M08) Analisar, interpretar, formular e solucionar problemas envolvendo números naturais e racionais, compreendendo os diferentes significados das operações, e validar a adequação dos resultados por meio de estimativas ou tecnologias digitais.
> (EF06M09) Calcular o resultado das operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) envolvendo números naturais e números racionais na representação fracionária e decimal, por meio de cálculo mental, estimativas, aproximações, arredondamentos, técnicas operatórias convencionais e tecnologias digitais, analisando a razoabilidade do cálculo e validando os resultados.(CURRÍCULO DA CIDADE, 2019, p. 106)

Percebemos, portanto, que há de se considerar muito bem o tema da adição e subtração de frações no Ensino Fundamental – importância dada pelos documentos oficiais.

Disso, vamos conhecer alguns materiais utilizados hoje como livros didáticos, indicados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) e observar como esse assunto é tratado.

Temos na rede pública municipal da cidade de São Paulo a indicação para uso nas escolas do livro *Teláris Matemática, 6º ano: ensino fundamental, anos finais,* de Dante (2018), onde vemos no Capítulo 6 a apresentação das frações e suas operações: no tópico *Frações com Denominadores Diferentes*, há um exemplo de adição de frações com denominadores diferentes.

O seu método da adição, para os alunos, é escrever frações equivalentes às dadas até se encontrar duas com os mesmos denominadores, pois, assim, somar-se-iam os numeradores simplesmente:

> Acompanhe as situações a seguir e faça no caderno o que se pede.
> 1. Pela manhã, uma balsa percorreu $\frac{2}{3}$ de um percurso e, à tarde, $\frac{1}{4}$. Qual fração do percurso ela percorreu ao todo? Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar esta adição: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = ?$ Para isso, vamos reduzir as frações ao mesmo denominador usando frações equivalentes, ou seja, escrevemos as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ até encontrarmos 2 frações com denominadores iguais.
> $\frac{2}{3}$ ---> $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \mathbf{\frac{8}{12}}, \frac{10}{15}, \ldots$
> $\frac{1}{4}$ ---> $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \mathbf{\frac{3}{12}}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \ldots$
> Copie, complete e escreva a resposta no caderno.
> $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} =$
> (DANTE, 2018, p. 190).

Efetivamente, mesmo tendo apresentado a ideia de múltiplos e de divisores de um número natural, no Capítulo 4, não há a exploração do conceito de mínimo múltiplo comum e de máximo divisor comum.

Como vimos antes, nos apontamentos de Leonhard Euler, temos um critério para a adição de frações com denominadores diferentes, o qual permite encontrar o resultado de maneira rápida e direta; já o apresentado por Dante (2018), multiplicam-se numerador e denominador das frações dadas por números naturais, utilizados numa ordem tal a criar uma sequência, para, no meio desta, surgir aquelas frações equivalentes que resolverão o problema.

Notoriamente, as dificuldades serão maiores se as frações dos problemas de adição, por exemplo, tiverem mínimo múltiplo comum dos denominadores numa posição da sequência mencionada muito além da quarta posição!

A mesma sugestão é feita para a subtração de frações:

> 2. Uma balsa percorreu $\frac{3}{4}$ de um percurso. Quanto ela ainda precisa percorrer para completar $\frac{5}{6}$ do percurso? Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar esta subtração: $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = ?$ Analogamente, vamos reduzir as frações ao mesmo denominador usando frações equivalentes.
>
> [...] $\frac{5}{6}$ ---> $\frac{5}{6}, \mathbf{\frac{10}{12}}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \frac{25}{30}, \ldots$
>
> $\frac{3}{4}$ ---> $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \mathbf{\frac{9}{12}}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \ldots$
>
> [...] $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$
>
> (DANTE, 2018, p.191).

Vejamos outro material: temos o livro apostilado *Trilhas de Aprendizagem (volumes 1 e 2), 6º ano do ensino fundamental,* feito pela equipe da Coordenadoria Pedagógica da Secretaria Municipal de Educação da Cidade de São Paulo (COPED) em 2020.

Este material foi entregue para os alunos da rede pública para estudarem remotamente, usando a plataforma *Google Classroom* como apoio, onde o professor disponibilizaria questões, orientações e indicaria no material as atividades a executar. Tudo isso devido à pandemia de COVID – 19 que assolou o País em 2020, impedindo as aulas presenciais.

Vemos nesse material que não há uma preocupação, na área de Matemática, em se estudar mais a fundo operações com as frações; existe uma insignificante menção do conceito de fração na Atividade 17 – Comparando problemas, do volume 1:

> Problema 2
> Márcia possui 60 brigadeiros e quer dividi-los, igualmente, entre caixas onde cabem a mesma quantidade de brigadeiros em cada uma.
> [...] c) Encontre os quocientes (resultados) das divisões abaixo:
>
> $\frac{60}{1} = \frac{120}{2} = \frac{180}{3} = \frac{240}{4} = \frac{300}{5} = \frac{360}{6} =$
>
> Compare os quocientes. O que você percebeu?
> (TRILHAS DE APRENDIZAGEM, 2020, p. 72).

Também existe na Atividade 31 – Comparando números racionais, mesmo volume, associada a representação decimal:

> Dona Consuelo entregou aos seus dois filhos duas barras de chocolate de mesma forma e tamanho. Ricardo comeu $\frac{1}{3}$ da barra e Márcia comeu $\frac{1}{4}$. Quem comeu mais chocolate?
> […] b) compare cada par de fração e escreva, entre elas, os símbolos > (maior que), < (menor que) ou = (equivalente a):
>
> | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$ | $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ | $\frac{2}{2}$ $\frac{5}{6}$ | $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ | $\frac{3}{3}$ $\frac{6}{5}$ |
>
> Confira as suas respostas usando as tiras de fração do encarte.
> (c) Escreva esses números em ordem crescente (do menor para o maior):
> 0,9 – 1,481 – 0,63 – 2. (TRILHAS DE APRENDIZAGEM, 2020, p. 86).

Já no Volume 2, usado no 2º semestre de 2020, vemos uma singela menção de frações, para o 6º ano do ensino fundamental, na Atividade 23 – Números racionais:

> […] o número $\frac{3}{8}$ indica a relação entre a quantidade de partes iguais (3) que foram utilizadas na confecção de uma toalha, a partir de um tecido que foi dividido em 8 partes iguais. […] No número $\frac{3}{8}$, o 3 é o numerador e o 8 é o denominador (TRILHAS DE APRENDIZAGEM, 2020, p. 128).

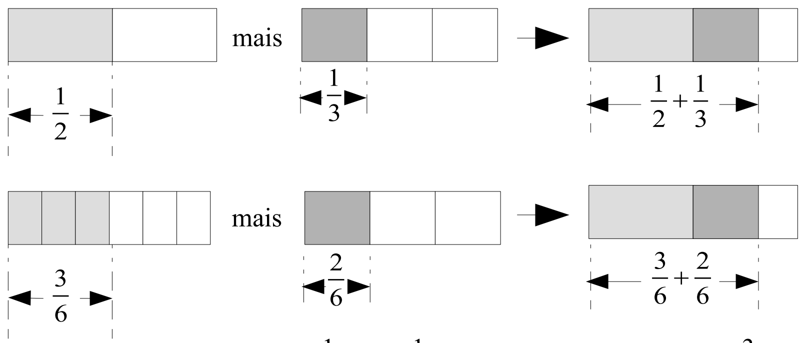
E também existe na Atividade 33 – Números racionais representados na forma decimal:

> Os números racionais na forma decimal, assim como os números naturais, podem ser representados por extenso (usando palavras) ou usando algarismos. Veja dois exemplos:
> * 0,5: cinco décimos
> * 2,16: dois inteiros e dezesseis centésimos (TRILHAS DE APRENDIZAGEM, 2020, p.140).

Notoriamente, a preocupação em se colocar num material apostilado uma grande quantidade de assuntos de Matemática, previstos pelo Currículo da Cidade, em face à situação emergencial vivida pela rede escolar, acabou por privilegiar assuntos (como o conhecimento das formas geométricas planas e espaciais, por exemplo) que poderiam ser vistos mais adiante, no retorno às aulas presenciais, em detrimento de outros – no caso, o estudo das operações com frações.

Vejamos outra sugestão didática do PNLD para o 6º ano do ensino fundamental: o livro *A conquista da Matemática*, de Giovanni Jr e Castrucci (2018).

A ideia de operar com frações também passa pela sugestão em se obter frações equivalentes, tais que, para aquelas com denominadores diferentes, encontrem-se denominadores iguais; no Capítulo 5, intitulado Adição e Subtração de Frações, apresenta-se como exemplo para a resolução da adição de frações com denominadores diferentes, o uso de esquemas e a partir deles, por comparação, encontram-se as frações equivalentes:

> Helena foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Helena gastou nessas duas bancas?
>
> Para resolver esse problema, devemos calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
>
> 
>
>
> As figuras nos mostram qua calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$
> (GIOVANNI JR & CASTRUCCI , 2018, p. 150).

Não há uma indicação clara de como se obtiveram as frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$. E, reduzidas ao mesmo denominador, termina apresentando a resposta $\frac{5}{6}$.

A ideia apresentada por Giovanni Jr e Castrucci (2018) também é utilizada na subtração de frações.

Notoriamente, tanto no primeiro livro apresentado, aqui, como neste útimo descrito, as atividades sugeridas aos alunos perpassam por frações cujos denominadores possuem valores pequenos, onde a busca por frações equivalentes – estratégia para a operação de adição e subtração de frações – se torna menos dificultosa: construção de sequência de frações equivalentes.

A limitação imposta para operar com frações e a falta de um critério de resolução claro torna, consequentemente, a operação de frações um procedimento a parte!

Esses materiais são escolhidos pelos professores da unidade escolar, dentre uma relação sugerida pela SME (Secretaria Municipal de Educação). Os professores procuram, como regra, aqueles que atendam mais plenamente as necessidades da aprendizagem!

Podemos perceber que, especificamente, o assunto da adição e subtração de frações, na proposta pedagógica para a rede pública, apresentada pelos livros didáticos sugeridos pelo PNLD, traz a ideia de adiamento do conhecimento do referido assunto.

Em contrapartida, o método de Euler, para o trato com as frações, no tocante à sua adição e subtração, traz mais lucidez (reveja o Capítulo 3) e entendimento pois os cálculos de máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum, necessários para se operarem as frações nas referidas operações, são feitos sem se passar pelos números primos. O que foi sugerido pelos livros outrora exemplificados, para operarem as frações, foi construir sequências destas, equivalentes, e observar aqueles elementos das sequências com denominadores comuns.

Seguindo-se os caminhos operatórios dados por Euler, dadas duas frações – com denominadores diferentes, por exemplo – alcançam-se a sua adição e subtração sem se contar com o acaso, mas com a precisão dos cálculos!

Ainda: é notório, dadas as exigências da BNCC e do Currículo da Cidade do Município de São Paulo (mencionados anteriormente), no que dizem respeito ao estudo dos números racionais, que o método de Euler está em pleno acordo com os parâmetros curriculares, mas também traz o benefício de se estudar o assunto em profundidade: haja vista os estudo das operações elementares – adição, subtração, multiplicação e divisão – em capítulos anteriores, do mesmo livro, e o estudo das frações, para a posterior apresentação das operações de adição e subtração destas.

Assim, só para citar alguns exemplos aqui – podendo-se estender para outros que, certamente, tornar-se-iam um curso completo de Matemática – podemos perceber que o manejo com as frações é um procedimento necessário no desenvolvimento do ensino e da aprendizagem de Matemática em diferentes momentos da Educação.

CAPÍTULO 5: CONCLUSÃO E DESDOBRAMENTOS

De fato, saber operar as frações – principalmente no que diz respeito a sua soma e a sua diferença – é, para o estudante, o conhecimento necessário para galgar na carreira profissional, em nível técnico ou Superior, na área de Exatas ou onde a Matemática lhe for exigida. Se em algum momento de sua vida, o estudante se deparar com a Matemática para lhe sanar suas necessidades ou para lhe revelar a verdade, encontrar a certeza onde havia dúvida, ter a compreensão dos fatos em detrimento da confusão e da discórdia, então, a adição e a subtração das frações aparece com importância, tanto quanto ser versado nas quatro operações.

O método de Leonhard Euler não só traz uma facilidade para se sanar as dúvidas na operação com frações na Educação Básica, mas traz subsídios para o estudante continuar seus estudos e não mergulhar numa "matemática obscura" – frase que já ouvi alguns alunos mencionarem quando adentram no Ensino Fundamental dos anos finais da Educação Básica.

O uso da relação decorrente do produto do mdc (máximo divisor comum) e mmc (mínimo múltiplo comum), apresentado pela obra referida de Euler, traz uma significativa importância pois, diferentemente do que se mostra hoje, o cálculo de tais elementos não necessita de números primos. A maneira de Euler para demonstrar a validade de tal relação indica reconhecimento de que, na Educação Básica, necessita-se de muita clareza e entendimento sobre o assunto a se ensinar. A sutileza ao se reconhecer que no produto de dois números naturais está o mmc e o mdc (sabendo-se que se o produto for dividido pelo **maior** divisor comum o resultado será o **menor** múltiplo comum – numa relação de máximo e de mínimo) é que torna a aprendizagem desse teorema importante para se ensinar operações com frações, e a argumentação usada para indicar a validade de tal relação traz rápida compreensão. O rigor, no entanto, de uma demonstração mais formal de que "dados dois números inteiros a e b, então $ab = mdc(a, b) \cdot mmc(a, b)$" não será abandonado, talvez postergado, para quando o estudante estiver mais amadurecido no trato de conceitos e ideias matemáticas – a demonstração formal desse resultado encontra-se no livro *Números – Uma Introdução à Matemática* (2001) de Milies e Coelho.

A importância de um método claro para o ensino de frações se torna muito necessária haja vista as sugestões de livros didáticos atuais, apresentados como exemplos, aqui, e que são usados na rede pública, escolhidos, dentre outros, como os melhores para a aprendizagem!

O aluno, ou o estudioso de assunto matemático, tem o direito de saber a verdade e de conhecer o acervo de tudo aquilo que a humanidade já produziu. Não podemos protelar mais e supor que, no futuro, sua necessidade o fará procurar o conhecimento que precisa. Isso é transferir o problema, sem resolvê-lo, para mais adiante! Ser no futuro um pesquisador é uma atitude que deve ser incentivada no espíriro humano, de fato, mas se podemos revelar assuntos para que, no futuro, facilitarão suas pesquisas e lhe trarão melhor entendimento, então, é nosso dever, como docentes, apresentar e ensiná-los agora.

Pensando nisso, vemos que o apresentado, como tarefas didáticas, pode ser entendido como um curso de aperfeiçoamento para professores da rede pública da Educação Básica, que atuam no Ensino Fundamental (Alfabetização e Interdisciplinar – corresponde aos primeiros seis anos do Ensino Fundamental na Educação Básica), além, é claro, como material de instrumento de trabalho do educador para o ensino no 6º ano do Ensino Fundamental e, por que não dizer, para além (o dito Ensino Fundamental do Ciclo Autoral[(43)], atualmente), para aqueles alunos que não tiveram a oportunidade de ver, com mais propriedade, a adição e a subtração de frações.

Notoriamente, a necessidade de se escrever sobre o método de Leonhard Euler exigiu, como mencionado antes, a tradução para a língua portuguesa de *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl*. Assim, essa tradução gerou a possibilidade da publicação dessa obra em língua portuguesa como promessa para os futuros docentes e pesquisadores poderem ter acesso a uma fonte de conhecimento reconhecidamente grandiosa, haja vista que foi produzida, na sua origem, pelo magnífico matemático Leonhard Euler.

Vimos que a segurança ao tratar com as operações dispensou o uso de sinais operatórios. Este é o indicativo de que as operações matemáticas podem ser incorporadas ao pensamento de maneira natural, basta, no momento da operação, perceber os resultados nos esquemas ou algoritmos. Essa atitude indica também tranquilidade e segurança no trato operatório numérico.

A representação esquemática do divisor à esquerda não foi apresentada no Capítulo 5 de *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl* por acaso (divisor indicado à esquerda do dividendo). Foi visto que, dessa forma, o cálculo do mdc, nos capítulos posteriores, segundo a maneira das divisões sucessivas, torna-se, também mais natural, pois escrevemos da esquerda para a direita, e de cima para baixo na folha.

O uso das regras operatórias para "números grandes" (com muitos algarismos) vistos nos exemplos de sua obra indica, mais uma vez, que reconhecida a regra, assimilida ou apreendida, qualquer conta pode ser feita de maneira segura.

[(43)] Na rede pública municipal da cidade de São Paulo, há atualmente a divisão do Ensino Fundamental em: Ciclo Alfabetizador (1º, 2º e 3º anos iniciais), Ciclo Interdisciplinar (4º, 5º e 6º anos) e o Ciclo Autoral (7º, 8º e 9º anos finais); este último recebeu esse nome em virtude do aluno, nesse momento, ter de desenvolver um trabalho de pesquisa para conclusão de seu curso (TCA – Trabalho de Conclusão de Aprendizagem), abordando, notoriamente, temas livres e de sua escolha, sendo, portanto autor desse trabalho. Este é apresentado como palestra – seminários – aos outros colegas da escola, além de ser entregue por escrito.

Em dado momento da sua apresentação das regras para se efetuar a divisão, no Capítulo 5 do referido livro – parte 1 das tarefas didáticas aqui apresentadas no Capítulo 3 – Leonhard Euler comenta o fato do divisor ser nulo: "*Finalmente, deve ser observado também que se o divisor for zero, o quociente será infinitamente grande; este caso, por si só, não ocorre na divisão comum, pelo que não é necessário transmitir algo do infinito a um principiante.*" (EULER, 1738, p. 119), o que traduz uma ideia intuitiva, da época, de que, diferentemente do que se comenta aos estudantes atualmente na Educação Básica e além (ou seja, que não há divisão por zero), a divisão com divisores próximos de zero traz resultados, o ***quotus***, com valores muito grandes. E se o divisor for zero significa que o processo da divisão (como uma subtração repetida) é algo que pode continuar indefinidamente, o quanto se deseja: um processo que não chega efetivamente a um resultado, mas continua infinitamente. Este é um relevante destaque histórico. É o reconhecimento da ideia de limites de maneira muito significativa.

Ainda: "*Mas deixamos de fora estes casos nesta tabela, em que o divisor é 1. O 1 é entendido como estando em cada número com a frequência que o próprio número indica. Isto é, se o divisor for 1, então o quociente é sempre igual ao dividendo.[...] Assim, estamos habituados a dizer que não se divide, enquanto o dividendo indica o próprio quociente! Além disso, é evidente, também, que se o divisor for igual ao dividendo, o quociente deve ser sempre 1, pois qualquer número está contido em si mesmo uma vez.* " (EULER, 1738, p. 119), o que, à época de Euler, isto significava dizer que numa divisão com divisor igual a unidade não há divisão propriamente, pois o resultado (quociente) é igual ao dividendo; não houve mudanças na operação! Matematicamente, entretanto, temos a divisão, pois ela pode ser feita segundo sua definição inicial (uma subtração repetida): é um processo finito e produz um resultado claro. A conclusão aqui é que dividir pressuponha divisor com valor igual, no mínimo, a dois!

São conclusões importantes no que diz respeito ao entendimento da divisão, quando se depara com ela pela primeira vez: o estudante do ensino fundamental tem a ideia de que dividir deve ser natural, pois pensar em "dividir" significa distribuir, formar dois grupos pelo menos. Se no final, o resultado é o mesmo que antes da operação, ou seja, o dividendo continuou "intacto" então não houve divisão – pensamento na época. Do mesmo modo, perante à percepção natural da operação de dividir, ter divisores muito pequenos – o que significaria próximos de zero – indicar-se-ia para o estudante que, do dividendo, retiraram-se partes muito "pequenas" deste, o que implicaria surgir um número muito grande de grupos na divisão. E na concepção de se poder repetir a subtração com o subtraendo zero, percebe-se que o processo não termina! Mais uma vez, aqui, nessa obra para a Educação Básica, testemunhamos Leonhard Euler convidando-nos a uma reflexão mais profunda sobre um aspecto simples na Matemática!

Também vimos que os números negativos são deixados de lado, nesse primeiro momento de operações com frações. Isso indica uma sugestão de trabalho na Educação Básica que permite explorar ao máximo o potencial operatório das frações no ensino: avançar de maneira segura nas operações de adição e subtração de frações, no campo dos racionais positivos. Tal sugestão de se trabalhar somente com os números racionais positivos no início do Educação Básica traz a ideia de fortalecimento na aprendizagem, pois a ideia de número negativo indica um avanço na abstração tal que só se é reconhecido o sentido pleno quando se pode efetivamente medir na realidade, para os alunos iniciantes. Quando representamos o “débito”, por exemplo, como uma grandeza mensurável, para o aluno iniciante, a indicação é real, “positiva” de que “há uma quantidade positiva que falta ser preenchida numa conta bancária”, por exemplo. Essa sofisticação mental que, depois, é indicada com o sinal “–” (menos) só é entendida plenamente quando se caminhou bastante no campo dos positivos.

Assim, sugerimos no currículo da Educação Básica, principalmente para os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, que se trabalhe à maneira de Euler: explorar ao máximo os números racionais positivos. E nos anos seguintes, onde a abstração álgébrica se inicia (7º e 8º anos), apresentam-se os racionais negativos.

E, por fim mas nunca sendo um estado acabado, que continuemos a repensar nossa prática, em sala de aula, pois é ainda lá que devem ocorrer a discussão das ideias, a apresentação de métodos de ensino, a troca de informações, os debates e as palestras, auxiliados sempre por giz e lousa, por tudo que é preciso ter para se cumprir a razão primordial da escola: ser um local de aprendizagem!

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CASTRO, T. B. **A História da Matemática como Motivação para o Processo de Aprendizagem e Contextualização dos Conteúdos Matemáticos na Educação Básica**. 2016, 43f. Juiz de Fora: Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R. **A Conquista da Matemática**. 4. ed. São Paulo. 2018.

CURRÍCULO DA CIDADE. **Ensino Fundamental: Matemática**. 2. ed. São Paulo: SME/ COPED, 2019.

D'AMBRÓSIO, U. **A Interface entre História e Matemática: Uma Visão Histórico-Pedagógica**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

DANTE, L. R. **Teláris Matemática, 6º ano: ensino fundamental, anos finais**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

EULER, L. **Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl.** Academiae der Wissenschaften in St. Petersburg. Th. 1. Von den speciebus mit gantzen und gebrochenen Zahlen. [SPb.]: gedruckt in der Academischen Buchdruckerey, Bd. 1. St. Petersburg, 1738. Disponível em: https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/euler_rechenkunst01_1738. Acesso em: 20 nov 2020.

FELICIANO, L. F. **O Uso da História da Matemática em Sala de Aula: o que pensam alguns professores do ensino básico**. 2008. 171f. Rio Claro: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2008.

FERREIRA, E. S. **Onze Avos, Doze Avos, … De Onde Vem Este Termo Avo?**; Revista Brasileira de Histrória da Matemática, Vol. 6 nº 11 – abr. 2006.

KATZ, V. J. **Using History to Teach Mathematics**. Washington DC, USA: The Mathematical Association of America, 2000.

KIRIKOVA, O. About Einleitung zur Rechen-Kunst. Mensagem recebida por *e-mail* em 27 jan. 2021.

__________. About Einleitung zur Rechen-kunst. Mensagem recebida por *e-mail* em 25 fev. 2021.

__________. About Einleitung zur Rechen-kunst. Mensagem recebida por *e-mail* em 05 abr. 2021.

__________. About Einleitung zur Rechen-kunst – Leonhard Euler. Mensagem recebida por *e-mail* em 08 jun. 2021.

__________. About Einleitung zur Rechen-kunst – Leonhard Euler. Mensagem recebida por *e-mail* em 25 jun. 2021.

LINS, R. C. **Formação Pedagógica em Disiciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática**; Revista de Educação PUC – Campinas, N.18, p. 117 a 123 – Jun. 2005.

LUCHETTA, V. O. J. **Uma Possível Produção de Significados para as Séries Infinitas no Livro Elementos de Álgebra de Leonhard Euler**, 2017, 244 f, Rio Claro: Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2017.

MATTMÜLLER, M. Help on the work "Von den Speciebus mit ganzen und gebrochenen Zahlen". Mensagem recebida por *e-mail* em 17 ago. 2020.

MENDES, I. A. **História para o Ensino da Matemática: Uma Reinvenção Didática para a Sala de Aula**; Revista COCAR, Belém, Edição Especial N.3, p. 145 a 166 – Jan./Jul. 2017. Disponível em: http://paginas.uepa.br/seer/index.php/cocar. Programa de Pós-graduação Educação em Educação da UEPA.

MIGUEL, A.; MIORIM, M.A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MILIES, C. P.; COELHO S. P. **Números – Uma Introdução à Matemática**. 3 ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

OLIVEIRA, Z. V.; ALVIM, M. H. **Propostas Didáticas para o Ensino de Ciências e de Matemática**. 22 ed. Santo André: Universidade Federal do ABC, 2020.

SANTOS, M. P. **A Pedagogia Filosófica do Movimento Ilunimista no Século XVIII e suas Repercussões na Educação Escolar Contemporânea: uma Abordagem Histórica**; Imagens da Educação, Ponta Grossa, v. 3, n. 2, p. 1-13, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.4025/imagenseduc.v3i2.19881. Acesso em: 01 jun. 2021.

SUKHOMLINOV, M. I. **Materialy dlia Istorii Imperatorskoi Akademii nauk**. St. Petersburg, Rússia, 1885. Disponível em: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015081157243&view=1up&seq=75. Acesso em: 8 jun. 2021.

SME Portal Institucional – Cidade de São Paulo, Educação. Disponível em: https://educacao.sme.prefeitura.sp.gov.br/secretaria-de-educacao-divulga-os-dados-do-idep-indice-de-desenvolvimento-da-educacao-paulistana/1138/. Acesso em: 25 fev 2021.

THOMAS, C. About Einleitung zur Rechen-Kunſt zum Gebrauch des GYMNASII foreword. Mensagem recebida por *e-mail* em 01 ago. 2020.

TOU, E. R. About Einleitung zur Rechen-Kunſt zum Gebrauch des GYMNASII foreword. Mensagem recebida por *e-mail* em 10 set. 2020.

TRILHAS DE APRENDIZAGEM: **Ensino Fundamental** – 6º ano. – São Paulo: SME / COPED, 2020.

The Euler's Archive – Works by Euler/ University of the Pacific. Disponível em: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/. Acesso em: 10 jun. 2020.

Deutches Textarchiv - Euler, Leonhard: Einleitung zur Rechen-Kunst. Bd. 1. St. Petersburg, 1738. Disponível em: https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/euler_rechenkunst01_1738. Acesso em: 10 jun 2020.

Euler: Alguns artigos. Disponível em: **http://www.17centurymaths.com/contents/contentseulere17.html.** Acesso em: 10 jun 2020.

ANEXO – Algumas conversas, via *e-mail*, sobre assuntos referentes à pesquisa.

Gmail Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

About Einleitung zur Rechen-Kunft zum Gebrauch des GYMNASII foreword

3 mensagens

Hercules Machado <professorherc@gmail.com> 31 de julho de 2020 21:13

Para: redaktion@deutschestextarchiv.de

Dear librarian

My name is Hercules Machado. I'm a graduate student - MSc in Mathematics from the Federal Institute of São Paulo, Brazil. In my research, I have studied Euler's book "Gymnasii" and at this moment I have to know the preface of this book: my question is "was Euler the real author of that preface? "This question is because, as we know, the prefaces were written by guests or friends of the author in Euler's time. Well, I'm sorry to bother you, but I'll be very grateful if you can help me. My work is about the creation of a Portuguese translation of the aforementioned book by Euler (Gymnasii) and its application in the classroom (in current education - field work).

I appreciate the attention and I'll be looking forward to it. Thank you very much.

Hercules Machado.

Post Scriptum: I tried to write in Germany. Sorry if I couldn't.

Liebe Bibliothekarin, lieber Bibliothekar

Mein Name ist Herkules Machado. Ich bin ein graduierter Student - MSc in Mathematik vom Bundesinstitut in São Paulo, Brasilien. Bei meinen Recherchen habe ich Eulers Buch "Gymnasii" studiert, und im Moment muss ich das Vorwort dieses Buches kennen: Meine Frage lautet: "War Euler der wahre Autor dieses Vorworts? "Diese Frage kommt daher, dass, wie wir wissen, die Vorworte von Gästen oder Freunden des Autors zu Eulers Zeiten geschrieben wurden. Es tut mir leid, Sie zu stören, aber ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir helfen könnten. In meiner Arbeit geht es um die Erstellung einer portugiesischen Übersetzung des oben erwähnten Buches von Euler (Gymnasii) und dessen Anwendung im Unterricht (in der laufenden Ausbildung - Feldarbeit).

Ich schätze die Aufmerksamkeit und freue mich darauf. Ich danke Ihnen vielmals.

Hercules Machado

Christian Thomas <thomas@bbaw.de> 1 de agosto de 2020 09:49

Para: Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

Cc: redaktion@deutschestextarchiv.de

Dear Hercules Machado, this is of course an important and interesting question, but, I am afraid, this question goes beyond our scope of expertise – at least beyond mine. You might try the Georg-Eckert-Institut - Leibniz-Institut für internationale Schulbuchforschung (Georg Eckert Institute for International Textbook Research) http://www.gei.de/en/home.html, they should be able to answer or at least point you in the right direction to find the answer. Also, maybe the editors of "Mathesis & Graphe: Leonhard Euler und die Entfaltung der Wissensysteme" (published 2010), Horst Bredekamp and Wladimir Velminski, will be able to help you? Sorry we cannot do more for you, good luck and if it's no trouble, let us know what you came up with on the matter! Thanks, best wishes, Christian Thomas

[Texto das mensagens anteriores oculto]

--

Christian Thomas

Wissenschaftlicher Mitarbeiter

50% CLARIN-D, www.clarin-d.net; DTA, www.deutschestextarchiv.de

Gmail

Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

AW: Help on the work "Von den Speciebus mit ganzen und gebrochenen Zahlen"

1 mensagem

Martin Mattmüller <martin.mattmueller@unibas.ch> 17 de agosto de 2020 08:43
Para: Valéria Luchetta <valeria.luchetta@gmail.com>
Cc: Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

Dear Professor Luchetta,

dear Mr. Machado,

I assume the work you are referring to is E 17, the first part of the *Einleitung zur Rechen-Kunst* that was written for the *Gymnasium* at the St. Petersburg Academy in 1735 and printed in 1738. As you know, all this textbook was published anonymously, but (besides the *ex ungue leonem* argument) Euler's authorship is known from the necrologue by Nicolaus Fuss (*Opera Omnia* I 1, p. LX).

There is no documentary evidence that the preface (*Vorbericht*) is also Euler's, but the pedagogical mindset sketched in it fits so well with other remarks of his on this topic that I have never doubted it is; I actually sometimes use the text, when giving guided tours to highschool teachers and students, to attest to Euler's exemplary attitude to elementary teaching!

It is not impossible that more conclusive documentation on this question – let's say, a manuscript of the preface – exists in the files of the Petersburg Archive of the Russian Academy of Science, but finding this (or conclusively proving its absence) would be a daunting task. In my opinion, you should use, translate and interpret the text as being Euler's and perhaps hedge your bets by adding a note that (just as all the book) it was published without a signature. I am sorry I do not have a more assertive answer to your interesting question; in case you can find out more, I should be glad to hear about it.

By the way: When I last heard from you, you (Professor Luchetta) were doing research on an early 19th-century Portuguese translation of Euler's *Algebra*. If this has led to a publication, could you please send me some documentation? Thanks in advance!

Wishing you all the best for your work, with my best regards,

Martin Mattmüller

Gmail

Hercules Machado <professorhero@gmail.com>

About Einleitung zur Rechen-Kunft

4 mensagens

Hercules Machado <professorhero@gmail.com> 25 de janeiro de 2021 20:50
Para: СПбФ АРАН - ОИО <spbbaras-oio@yandex.com>

Dear Kinkova
I hope your family and you are well.
I am very grateful for your help in my research on the work of Leonhard Euler: Einleting zur Rechen-Kunst.
However, I humbly come to you once again for your help with two more questions: the first is "what was the way the gymnasium was taught in Russia during Euler's time?
The second is: "What is the title in Russian of Einleitung zur Rechen-Kunst?".
I hope I'm not disturbing and once again I thank you.
Best regards.
Hercules Machado

СПбФ АРАН - ОИО <spbbaras-oio@yandex.com> 27 de janeiro de 2021 11:22
Para: Hercules Machado <professorhero@gmail.com>

Dear senhor Mercado,

Your question about the ways Euler's textbook was used in the Gymnasium of Petersburg Academy of Sciences seems to be much more a subject of extensive research, than that of a brief letter, because it makes to digress far from the subject into Russian history. Yet, I 'll try to explain it as brief as possible.

I should remind you first that by the early 18th century Russia had not had either native scholars, either native students in the European sense of "being educated". Educated Russians of that time had traditional religious education which did not meant to study real sciences like mathematics or physics etc., especially using the textbooks written by foreigners and non-orthodox authors, e.g., by Catholics or Protestants. That's why, having decided to establish the Academy of Sciences, Peter the Great made it consisting of 3 parts which were closely connected: the Gymnasium was supposed to teach pupils from the beginning to prepare the most gifted ones to enter the University where the Academy' members would have given them their lectures (it was why that the first members of the Academy were called not academicians but professors: their first obligation was to educate and just then to research). So, at last, graduating the University, the best students must have entered the Academy as assistants of its professors (*i.e.*, adjuncts) and generally future professors themselves. That was Peter's idea. However, for the first time he had to invite both foreign professors and adjuncts just to start educational and scientific process in Russia. January 22, 1724, Peter I approved the draft Charter of the Academy which was never legally confirmed by the Senate (a kind of Russian Parliament that time); that is why up to the first confirmed Charter of the Academy (1747) its members were operated by Peter's draft Charter. November 20, 1725, Peter's widow and successor, Ekaterina I issued a decree to prove the Academy establishment. A bit later, on January 14, 1726, it was declared first about lecturing at the Gymnasium and the University. May 1727, 20-year Leonhard Euler came Russia to become first an élève (student at the University) but very soon an adjunct of the Professor in Higher Mathematics Jacob Hermann and since 1733 the Professor of Higher Mathematics himself. By that time, Euler had already proved himself to be an incredibly talented scientist. July 27, 1730, the Professor in Physics Georg Bernhard Bulfinger said about Euler:

"Herr Leonhard Euler schon ehedessen in Teutschland durch öffentlichen Druck und nunmehro drei Jahre lang alhie so viele Proben seiner besondern Geschicklichkeit in der Höheren Geometrie von sich gegeben, daß er in diesem schweren und raren Studio vor einen der geschicktesten Männer kan gehalten werden. Aus dieser Ursache halte ich in vor tüchtig von den beider jetzo aufgehenden Professionen nemlich der Matheseos sublimioris oder Physicae Theoreticae et Experimentalis zu verwalten welche man ihm auftragen will".

I have retained here the obsolete orthography of the text. Going to cite Bulfinger, do indicate the archival code of the document that is: SPbB ARAS. R. I. Op. 92. D. 33. L. 2–2r.

Making the conclusion, I could say that 1) under Peter's draft Charter, Euler as a member of the Academy was obliged to prepare his own textbook on the subject in Latin (ein Systema oder Cursum in scriptis scribili), which should have been translated then into Russian; 2) in 1730-s, following the Academy's educational program its members were meant to write textbooks for the Academy's Gymnasium, which was bilingual that time: German-and-Russian, to develop these books then all over the Russian Empire.

1738, Euler's textbook was published in German.

1740, it was translated into Russian by two Russian-speaking students at the Academy's University: Peter Inokhodtsov and Ivan Judin.

Since that time, the textbooks were apparently used in both languages.

Here are its German and Russian titles:

Euler L. Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserl. Academiae der Wissenschaften in St. Petersburg. Th. 1. Von den speciebus mit ganzen und gebrochenen Zahlen. [SPb.]: gedruckt in der Academischen Buchdruckerey, 1738.

Эйлер Л. Универсальная арифметика, г. Леонгарда Ейлера. Переведенная с немецкого подлинника студентами Петром Иноходцовым и Иваном Юдиным. [Ч. 1]. СПб.: [Тип. Акад. наук], 1740.

Best regards,
Olga Kirikova

28.01.2021, 02:50, "Hercules Machado" <professorherc@gmail.com>:
[Texto das mensagens anteriores oculto]

Hercules Machado <professorherc@gmail.com> 27 de janeiro de 2021 18:59
Para: СПбФ АРАН - ОИО <spbbaras-oio@yandex.com>

Good night.
I hope you are well!
Thanks again for the information.
In fact, the knowledge of the teaching method in Russia at the time of Euler requires more refined and in-depth research. And his explanation was certainly enlightening and of great value to me. Thank you!
Just one consideration: the translation into German was done by Euler himself? Which translation was done first: German or Russian?
Thanks again!
Best regards.
Hercules Machado.

[Texto das mensagens anteriores oculto]

СПбФ АРАН - ОИО <spbbaras-oio@yandex.com> 28 de janeiro de 2021 05:21
Para: Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

Dear senhor Macado,

the book was written in German by Euler from the very beginning, because by that time the educational policy had been changed. Two years later, it was published in Russian version.
Best regards,
Olga Kirikova

28.01.2021, 00:59, "Hercules Machado" <professorherc@gmail.com>:
[Texto das mensagens anteriores oculto]

Gmail Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

About Einleitung zr Rechen-kunst - Leonhard Euler

3 mensagens

Hercules Machado <professorherc@gmail.com> 3 de junho de 2021 08:21
Para: СПбФ АРАН - ОИО <spbfaran-oio@yandex.com>

Good Morning!
Hope you and your family are well!
First, I want to thank you for your immense help in my graduate research on the life and work of Leonhard Euler.
Once again I humbly ask for your help to clarify some information, which has generated some controversy here.
You sent me an e-mail in which you mentioned that Euler went to Russia, at the age of 20, to become an "élève" (student at the University), before becoming an adjunct professor in higher mathematics under Prof. Jacob Hermann.
This caused a certain commotion, because the history books of mathematics here don't show that; they mention that he went to the Academy already holding a professorship.
Anyway, is there any document, or other record in the archives, that allows us to prove this fact that you mentioned - that Euler went to Russia as an élève? If there is, please, if you can send it to me, I will be once again grateful and in your debt!
I am at the conclusion of my work. It is taking a little time because of the pandemic, which, here in Brazil, is not easy to finish!! Many deaths every day! I am in São Paulo. The hospitals are still full, and the deaths are on average around 1500 daily!
I was able to take the first dose of the vaccine, but the slowness to vaccinate the population is very big! There is a Parliamentary Inquiry Commission, at the federal level, to find out the reason for this slowness!
Well, thanks again for your attention!
Regards
Hercules Machado

СПбФ АРАН - ОИО <spbfaran-oio@yandex.com> 8 de junho de 2021 07:24
Para: Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

Dear Mr Machado,
please, see the information about L. Euler here: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015081157243&view=1up&seq=75 and further on pp. 221, 281.
This book was written by prof. G.F. Müller, a historiographer of the Academy of Sciences, who was Euler's contemporary and briefly acquainted with him.
Best regards,
Olga Kirikova, Sr R.

03.06.2021, 14:21, "Hercules Machado" <professorherc@gmail.com>:
[Texto das mensagens anteriores oculto]

Hercules Machado <professorherc@gmail.com> 16 de junho de 2021 16:20
Para: Valéria Ostete Jannis Luchetta <valeria.luchetta@gmail.com>

Gmail Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

About Einleitung zur Rechen-kunst - Leonhard Euler
2 mensagens

Hercules Machado <professorherc@gmail.com> 24 de junho de 2021 08:31
Para: СПбФ АРАН - ОИО <spbbaras-oio@yandex.com>

Dear Mrs. Kirikova,
Good evening,
I hope you and your family are well.
First, I would like to thank you for the answers and information about Euler's arrival at the Academy; according to my guidance teacher, the fact is unprecedented for the history books published here.
By the way, could you answer me if Euler taught at the Gymnasium and actually used his work? Sorry if the question seems a bit obvious, but the doubt arose by the questioning of the history books here, because, according to them, Euler only wrote in a didactic way, but as a researcher only, lecturing sometimes, but he would not have actually taught.
If you can answer me, once again I strongly thank you!
Best regards
Hercules Machado

СПбФ АРАН - ОИО <spbbaras-oio@yandex.com> 25 de junho de 2021 06:12
Para: Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

Dear Mr. Machado,
L. Euler didn't taught at the Gymnasium of Petersburg Academy of Sciences, but he lectured on mathematics at the University of the Academy.
His books were of sure used.
Best regards,
Olga Kirikova, Sr.r.

24.06.2021, 15:32, "Hercules Machado" <professorherc@gmail.com>:
[Texto das mensagens anteriores oculto]

Gmail Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

About Einleitung zur Rechen-Kunst
2 mensagens

Hercules Machado <professorherc@gmail.com> 24 de fevereiro de 2021 10:27
Para: СПбФ АРАН - ОИО <spbbaras-oio@yandex.com>

Dear Olga Kirikova
Good afternoon
I really appreciate the information about Leonhard Euler's work that you sent me. I received it with great affection and attention.
Sorry if at some point I was repetitive, but I am a few months away from finishing my master's thesis and, therefore, I am reviewing some information.
And, once again, I strongly request one more piece of information that I believe is very pertinent to my work: in the study of the mentioned work of Euler, its use restricted in the Academy, were concrete materials such as cubes, plates or other auxiliary material used (as in a science laboratory)?
I once again look forward to your answer.
Thank you once again for your valued attention.
Hercules Machado

СПбФ АРАН - ОИО <spbbaras-oio@yandex.com> 25 de fevereiro de 2021 07:03
Para: Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

Dear senhor Machado!
Unfortunately, I can`t answer you for certain whether Euler used any auxiliary materials in his study or not because there is not any documentary evidence of that in our Archives.
Best regards,
Olga Kirikova

24.02.2021, 21:27, "Hercules Machado" <professorherc@gmail.com>:
[Texto das mensagens anteriores oculto]

Gmail

Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

About Einleitung zur Rechen-kust

2 mensagens

Hercules Machado <professorherc@gmail.com> 29 de março de 2021 16:56

Para: СПбФ АРАН - ОИО <spbbaras-oio@yandex.com>

Dear Mrs. Olga Kirikova,

Good afternoon.

Thank you again for your attention. Excuse me if I bother you, but more questions arose about the use of the referring work by Euler in my studies: first, was the study of fractions necessary, and mandatory, for a complete accounting training of the merchant of the time, for example? Was there a pedagogical thought of forming a citizen like today?

Second, was working with fractions, and their management, a recognized difficulty, as it is today, for elementary school students?

Once again I thank you for your attention and care. Thanks again. Your friend,

Hercules Machado.

СПбФ АРАН - ОИО <spbbaras-oio@yandex.com> 5 de abril de 2021 08:04

Para: Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

Dear senhor Machado,

do forgive me if I don`t satisfy completely your curiosity, just because your questions seem to be a part of your own research and it`s you who should find the answers. Yet, I'll try to provide you with some information I have.

I believe that merchants should have been always experienced in accounting that`s why they undoubtedly took up fractions. Euler himself wrote in the educational project of 1737 that every person despite his way of life should have felt a real need for Mathematics because it let everyone distinguish any doubtful thing from reliable, the truth from a lie. And that's why, he underlined, every pupil should have learned Arithmetic and Geometry: "Derowegen müssten im Gymnasio bei der Academie für allen Dingen die Arithmetic und Geometrie in solcher Vollkommenheit, als die zum Gymnasio gesetzte Zeit erlaubet, tractirt werden".

There were certainly various thoughts of forming a citizen in the 18th century. You can easily find that information in the Internet.

Pupils used to learn fractions in the second class of the Gymnasium. May be one of them were much happier in learning than others, depending their natural abilities.

Best regards,

Olga Kirikova, senior researcher

29.03.2021, 23:53, "Hercules Machado" <professorherc@gmail.com>:

[Texto das mensagens anteriores oculto]

Gmail

Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

euler

4 mensagens

СПбФ АРАН - ОИО <spbfaran-oio@yandex.com> 26 de agosto de 2020 05:54
Para: "professorherc@gmail.com" <professorherc@gmail.com>

Dear señor Machado,

Unfortunately, we can't help you to establish the authority of the preface to Euler's "Einleitung zur Rechen-Kunst, usw.", because in the Archives there are no actual facts about that.

Yet, we do realize that the question is of great importance to you. And if we find any information of your concern, we'll certainly let you know.

Best regards,

Olga Kirikova, senior researcher

Hercules Machado <professorherc@gmail.com> 26 de agosto de 2020 11:29
Para: СПбФ АРАН - ОИО <spbfaran-oio@yandex.com>

Dear Olga Kirikova!
I thank you so much for your concern! Your info became most useful to me now, for my research!
If you have any information about it, (e-mail's, sites, libraries or a professor's permission for contact) please, after that, please send me! Again, I beg your pardon for the work!
Best regards either!
Hercules Machado
[Texto das mensagens anteriores oculto]

Hercules Machado <professorherc@gmail.com> 9 de setembro de 2020 10:29
Para: СПбФ АРАН - ОИО <spbfaran-oio@yandex.com>

Hi, Mrs Olga Kirikova!!
I came again and beg another favor: could please tell me the correct name of your institute of research? It's necessary to me to note the correct name!
Thank so much again,
Best regards!
Hercules Machado
[Texto das mensagens anteriores oculto]

СПбФ АРАН - ОИО <spbfaran-oio@yandex.com> 17 de setembro de 2020 05:17

Para: Hercules Machado <professorherc@gmail.com>

Hi again,

I've heard back from Ian Bruce, who has translated the Rechenkunst into English; he has this to say:

> I can find no reason for suspecting that Euler did not write the foreward, as it is very much concerned with the desultory state of elementary mathematics at the time at St. Petersburg, and is written in the same style as the chapters that follow, with the aim of correcting the flaws in the system, as it were. From the introduction in the website: "One of Euler's early books was, it appears, thrust upon him, as he describes in the Forward. However, the manner in which he sets about to enlighten the Russian youth of the time is from a level perhaps more advanced than usual for the run of the mill books on arithmetic. I hasten to add that the work is hardly run of the mill, and would perhaps be more suited to a rare intellect who had never heard of arithmetic, which seems unlikely. Euler's great love of numbers soon becomes apparent, which he treats as old friends, and his approach is essentially one where no knowledge of algebra is assumed or used. Thus the text is very verbose but comprehensive."

If you'd like to communicate further with Dr. Bruce, you can contact him at ian.bruce@aoe.net.au.

And, to answer you other question: our institutional name is the Euler Archive. Let me know if you have any further questions.

~Erik

From: Hercules Machado <professorherc@gmail.com>
Sent: Wednesday, September 9, 2020 6:25 AM
To: Erik R. Tou <etou@uw.edu>
Subject: Re: About: Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des GYMNASII foreword

[Texto das mensagens anteriores oculto]