INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

O ENSINO DE PROBABILIDADE NO CONTEXTO DO JOGO DE TRUCO

Patrícia Aparecida Campos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Dr. Amari Goulart.

IFSP
São Paulo
2018

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C198e Campos, Patrícia Aparecida
O ensino de probabilidade no contexto do jogo de truco / Patrícia Aparecida Campos. São Paulo: [s.n.], 2018.
76 f. il.

Orientador: Amari Goulart

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2018.

1. Ensino de Matemática Por Meio de Jogos. 2. Análise Combinatória. 3. Probabilidade. 4. Jogo de Truco. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

PATRÍCIA APARECIDA CAMPOS

O ENSINO DE PROBABILIDADE NO CONTEXTO DO JOGO DE TRUCO

Dissertação apresentada e aprovada em 18 de dezembro de 2018 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Amari Goulart
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Marcelo Rivelino Rodrigues
Secretaria Municipal de Educação de São Paulo
Membro da Banca

“Capricho: fazer o melhor na condição que tem enquanto não tem condição de fazer melhor ainda para não ser medíocre”.

Mario Sérgio Cortella

Dedico este trabalho aos meus pais,

a minha não mais tão pequena Lorena,

ao meu esposo e ao professor Lauro Gomes

e a Deus...

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiramente, pela minha vida, saúde e energia para concluir esse programa.

Agradeço ao meu amigo Daniel Ortega que me indicou esse desafio.

Ao meu amigo Miguel Luís Folchetti Filho que me incentivou a continuar nas várias vezes que considerei desistir.

Aos meus amigos Grazielly Muniz da Cunha Prado e Régis Prado Barbosa, pela ajuda dedicada quando muito precisei.

Ao meu amigo Joan Josep Miro Ortega, quando me questionou sobre a relevância dessa pesquisa.

Ao Manoel, meu aluno que lançou a pergunta que me motivou a delimitar o tema desse trabalho, assim como aos meus outros alunos que foram tão solícitos e pacientes ao me ensinarem as regras do jogo de truco

Ao Professor Lauro, quem me inspirou a estudar Matemática.

Aos meus pais, por tudo. Ao meu esposo Madson, especialmente pela paciência que dedicou a mim em momentos tão intensos, e, principalmente, à minha Lorena, por compreender minhas ausências e motivar-me a cada respirar.

Agradeço ao Professor Amari Goulart, meu orientador, que me orientou sabiamente e com muita paciência.

À Francielle Campos, pela revisão desse trabalho.

RESUMO

Este trabalho propõe o ensino de probabilidade utilizando o jogo de truco como contexto. Os objetos matemáticos aqui tratados são a análise combinatória e a probabilidade, bem como as regras do jogo de truco também são explicadas e, então, são estabelecidos alguns cenários possíveis de ocorrer num jogo de truco entre dois jogadores quando estes jogam com cartas viradas. Sendo o truco um jogo no qual as decisões não são tomadas, necessariamente, racionalmente, mas, muitas vezes, dependem do perfil psicológico do jogador, para possibilitar a confecção desse trabalho particularizamos algumas situações que são livres no jogo real como, por exemplo, inviabilizamos o repique.

Nos cenários considerados, calculamos as probabilidades de vitória de cada jogador nos casos de um ou outro ser "o mão". Comparamos os resultados obtidos com aqueles esperados por um jogador de truco e, assim, pudemos refletir sobre a relevância de conhecimentos de probabilidade para a vitória no jogo de truco ou para a tomada de decisão após a ação do adversário. E finalmente, propomos alguns exercícios teóricos de probabilidade no contexto do jogo de truco, os quais não são encontrados em materiais utilizados pelos alunos de ensino médio, uma vez que, nos materiais disponíveis encontramos, no máximo, exercícios associados ao cálculo de probabilidades associadas à extração de cartas do baralho e não ao cálculo de probabilidades associadas a jogos de cartas de baralho.

Palavras-chave: ensino de matemática por meio de jogos, análise combinatória, probabilidade, jogo de truco.

PROBABILITY TEACHING BY MEANS OF “*TRUCO*” GAME

ABSTRACT

The purpose of this essay is the teaching of probability by using of *Truco*, a trick-taking card game, as a background. The mathematical objects handled here are combinatorial analysis and probability, just as the game rules are explained and, then, are set some possible scenarios that may occur in one game between two players when they play with face-up cards. As the *truco* is a game in which players make decisions not necessarily in a rational manner, but, quite often, it depends more on the player’s psychological profile, we specify some situations that are free in the real game. It allows the making of this research, for instance, we preclude the “repique”.

In the situations considered, we calculated the winning probabilities for each one of the players, in cases of one or other being the “hand”. Comparing the obtained results with the expected ones, we could think about the relevance of knowledge in probability to win the *truco game* or make a decision after the opponent’s action. Then, at last, we propose some probability tabletop exercises in the context of the game. This kind of activity is not found in any other regular material, used by high-school students, since in these available supplies we may only find, at most, exercises linked to the calculation of probabilities associated with the removal of the cards from the deck, and not with deck card games itself.

Keywords: mathematics teaching by means of games, combinatorial analysis, probability, “*truco*” game.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABELAS

Pág.

SUMÁRIO

Pág.

INTRODUÇÃO

Licenciei-me em Física pelo Instituto de Física da Universidade de São Paulo e, atualmente, sou professora de Matemática do Ensino Médio e aluna do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus São Paulo.

Ao iniciar o mestrado profissional, já havia estabelecido o objetivo de trabalhar com a abordagem da probabilidade como objeto matemático, entretanto, ainda não havia definido o que explorar e como trabalhar com este tópico. Então, durante uma das minhas aulas sobre probabilidades, para uma turma de 2º ano do Ensino Médio, um aluno me questionou sobre algo surpreendente: A probabilidade de ocorrência de determinado evento num jogo de truco. Mais precisamente, “qual seria a probabilidade de, num jogo de truco, um jogador ter o ‘zap’?” Não o respondi de imediato porque eu nunca havia jogado truco, tampouco conhecia suas regras. Contudo, naquele momento eu pude identificar, então, o contexto no qual trabalharia a probabilidade.

Portanto, neste trabalho, proponho o ensino da probabilidade, por meio do contexto do jogo de truco, visando a possibilidade da introdução, de forma mais dinâmica, ao estudo do objeto matemático escolhido. Ademais, evidenciando a relevância da prática matemática no cotidiano dos alunos.

Neste trabalho, fizemos uma revisão bibliográfica de alguns outros trabalhos que propõem o ensino de um objeto matemático utilizando algum jogo como ferramenta, concentrando-se nos textos que fazem análise da utilização do jogo de pôquer ou de truco. Além disso, contextualizamos historicamente a origem do estudo da probabilidade, descrevemos as regras do jogo de truco, fixamos alguns cenários possíveis de mãos, para dois jogadores que jogam com cartas viradas, e calculamos as probabilidades de vitória nos casos de um ou outro ser o mão.

No plano supracitado, a fim de facilitar esses cálculos, inviabilizamos o repique, disponibilizamos algumas questões sobre probabilidade que utilizam o jogo de truco como contexto.

Tais atividades poderão ser propostas a alunos do Ensino Médio, uma vez que, os exercícios que já existem nos materiais destinados ao Ensino Médio solicitam, no máximo, o cálculo de probabilidades associadas à extração de cartas de baralho ou lançamentos de dados.

Ao final, concluímos uma possibilidade real de ensinar probabilidade utilizando como contexto o jogo de truco e que, conhecimentos de probabilidade confirmam a intuição de um jogador leigo em probabilidade acerca de qual a vitória mais provável.

1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é inserir no ensino da Matemática, mais especificamente no tópico de probabilidade, o prazer, a disposição, a motivação pessoal e o respeito as regras que as pessoas costumam ter em relação a jogos, esta prática na educação é conhecida como gamificação. Então, a partir disso, poder refletir acerca da aplicação desses conhecimentos como possíveis vantagens ao, por exemplo, tomar decisões num jogo de truco. Isto é, um jogador com conhecimentos de probabilidade teria maior chance de ganhar?

Ainda que se trate de um estudo apenas teórico do tema, este trabalho objetiva trazer uma discussão comum de como a Matemática pode ser ensinada através dos jogos e seu aprendizado estar conectado ao convívio social e ao cotidiano dos alunos, sendo estes, nesse caso, jogadores. Portanto, este trabalho visa utilizar essa ferramenta didática de ensino para estudar o objeto matemático probabilidade num contexto de jogo.

1.1 Objetivos específicos

Conforme exposto anteriormente, ao longo deste trabalho responderemos à pergunta que nos motivou a realizar esta pesquisa: *"Qual é a probabilidade de um jogador de truco obter o zap?"*. Além disso, calcularemos as probabilidades de vitórias para alguns jogos e, a partir desses cálculos, esperamos que os alunos sejam capazes de verificar outras probabilidades, em outros cenários, já que são muitos. Ao final, disponibilizaremos algumas questões inéditas que podem ser feitas acerca do tema. Sobre estas, refletimos sobre o porquê de não termos questões de probabilidade associadas ao truco em avaliações voltadas para o ensino médio, como nos vestibulares e no Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM). Assim, concluímos que é um contexto que exige, no mínimo, algum tempo de apropriação, o que não é disponibilizado em tais circunstâncias.

2 O REFERENCIAL TEÓRICO

O objetivo desse trabalho é o ensino da probabilidade, utilizando o jogo de truco como contexto. Dentre os trabalhos que revisamos, não encontramos nada exatamente nessa linha. No entanto, encontramos alguns trabalhos que pudemos de alguma forma conectar ao nosso objeto de pesquisa.

Seguindo por essa linha, no livro “O jogo e a matemática no contexto da sala de aula”, Grando (2004), ressalta o prazer que crianças têm por jogos, pelo lúdico, e o compromisso que têm nesse contexto pelo cumprimento de regras. Esse cenário é muito propício ao ensino de matemática, pois abrange de uma nova forma o interesse pelo aprendizado.

A autora demonstra ciência da dificuldade do ensino dessa disciplina ao destacar que, diferentemente de disciplinas da área das ciências da natureza, como Química e Física, não há como observar a matemática acontecendo, então devemos disponibilizar estratégias que intermedeiem o abstrato e o concreto, e o jogo apresenta esse papel.

Contudo, segundo a autora, os professores devem ter o cuidado ao explorar essa ideia, atentando-se para que o jogo seja bem orientado quando aplicado e ter a clareza do objetivo ao escolher essa ferramenta didática. Tudo isso para que ela não seja interpretada e utilizada como prêmio por bom comportamento.

> Tais exercícios/problemas/questões podem passar a se constituir como problema para o aluno à medida que forem problematizados ou reformulados pelo professor e inseridos em um contexto que lhes dará sentido. Dessa forma, não ficarão restritos a uma aplicação ou verificação de conhecimentos, mas passarão a fazer parte do processo construtivo do saber (CLEMENT e TERRAZZAN, 2011, p. 88 *apud* GOMES, 2014, p.3).

Ademais, GRANDO (2004, p.29) resume muito objetivamente as vantagens e desvantagens da utilização dos jogos no ensino da matemática. Apesar de considerar que o professor deve tratar a didática em questão com cuidado e organização, como foi dito acima, traz para a matemática como aprendizado uma análise da relação entre o jogo e a resolução de problemas, evidenciando a possibilidade de definirmos conceitos através da discussão matemática comum que se dá entre os alunos e também entre estes e seus professores.

Tabela 1 – Vantagens e desvantagens do ensino da Matemática por meio de jogos, segundo Grando

VANTAGENS
• (re)significado de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno;
• introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão;
• desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos);
• aprender a tomar decisões e saber avaliá-las;
• significação para conceitos aparentemente incompreensíveis;
• propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade);
• o jogo requer a participação ativa do aluno na construção de seu próprio conhecimento;
• o jogo favorece a interação social entre os alunos e conscientização de trabalho em grupo;
• a utilização dos jogos é um fator de interesse para os alunos;
• dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, do senso crítico, da participação, da competição “sadia”, da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender;
• as atividades com jogos podem ser utilizadas para desenvolver habilidades de que os alunos necessitam. É útil no trabalho com alunos de diferentes níveis.
• as atividades com jogos permitem ao professor identificar e diagnosticar algumas dificuldades dos alunos.
DESVANTAGENS
• quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um “apêndice” em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber porque jogam;
• o tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos por falta de tempo;
• as falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno;
• a perda da “ludicidade” do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo;
• a coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo;
• a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam a vir a subsidiar o trabalho docente.

Fonte: GRANDO, 2004, p.31-32.

Considerando mais especificamente o ensino de probabilidade por meio de jogos, encontramos alguns trabalhos que propõem o ensino de probabilidade através do jogo de pôquer, o qual, diferentemente do truco que é caracterizado como um jogo de azar, é caracterizado como um esporte da mente, assim como o xadrez.

Em seu artigo, THEBAS *et al* (2015), utilizam o pôquer como ferramenta pedagógica, pois os autores acreditam que um cidadão com raciocínio lógico bem desenvolvido tem vantagem em diversas situações, tais como: interpretar melhor o comportamento das pessoas, analisar riscos, decidir crítica e cautelosamente, entre outros. Segundo eles, em posse dos conhecimentos em probabilidade podemos decidir mais assertivamente diante da possibilidade de ocorrência ou não de um evento e, mais notadamente, propuseram ensinar através do pôquer: a metodologia adotada foi uma sequência didática que o utilizava como "pano de fundo" para o ensino da probabilidade.

Na mesma perspectiva, em seu trabalho de conclusão de curso, "A matemática do *poker*", POLESI (2017) propôs o ensino de probabilidade através do jogo de pôquer. Inicialmente, o autor objetiva apenas utilizar o jogo como ferramenta didática, porém, à medida que ocorre o desenvolvimento do trabalho, surpreende-se com fatores importantes e favoráveis ao meio escolar como o desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas, por exemplo, bem como o aprendizado para tomada de decisões, a experiência para saber avaliá-las, interação social e desenvolvimento de habilidades cognitivas e psicológicas.

Outrossim, neste trabalho, propomos utilizar o jogo de truco como contexto para o ensino de probabilidade, como também verificarmos se conhecimentos de probabilidade podem favorecer a tomada das decisões que levará um jogador à vitória e, ainda, se cálculos probabilísticos confirmam a "intuição" do jogador em relação ao resultado final do jogo.

Então, diante dos resultados obtidos, talvez devêssemos atentar os alunos para o óbvio: conteúdos matemáticos aprendidos na escola podem e devem ser aplicados fora dela. A partir disso, incentivá-los a, assim como no jogo de truco faz-se necessária a tomada de algumas decisões baseadas em conhecimentos de probabilidade, seguir raciocínio semelhante ante alguns problemas em seu cotidiano.

Embora não tenhamos encontrado material que propusesse o ensino de probabilidade através do jogo de truco, atribuímos a ausência de pesquisa à complexidade e subjetividade do assunto. Ainda assim, o artigo “O ensino da análise combinatória e o jogo de truco: uma articulação possível”, Gomes et al. (2014), propõe uma atividade que objetiva o ensino da análise combinatória utilizando a metodologia de resolução de problemas no contexto do jogo de truco. Apesar de ter sido o único trabalho que localizamos a propor algo nessa linha, nele são estabelecidos cenários a partir dos quais deve-se estudar análise combinatória. Gomes *et al.* (2014) não explica o porquê de trabalhar com cenários pré-definidos, mas, temos por hipótese que, a escolha de cenários pré-definidos tenha sido devido ao fato de que o número possibilidades é muito grande. Por essa razão, neste trabalho também optamos por trabalhar com cenários pré-definidos.

3 A HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Em THEBAS *et al* (2015) e VIALI (2008), encontramos que o estudo da probabilidade surgiu na Idade Média, com teorias sobre jogos e apostas. De acordo com os autores, os precursores da teoria da probabilidade foram os italianos Gerônimo Cardano (1501 – 1576), Galileu Galilei (1564 – 1642), Luca Pacioli (1445 – 1517) e Nicollo Tartaglia (1499 – 1557); mais tarde, outros importantes matemáticos: Blaise Pascal (1623 – 1662), Pierre de Fermat (1601 – 1665), Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) e Lenis Poisson (1781 – 1840) também colaboraram para o desenvolvimento da teoria.

Embora não tenha publicado nada de original, Pacioli ficou conhecido na história do desenvolvimento da teoria da probabilidade por seu trabalho *Summa*, publicado em Veneza, em 1494, no qual apresenta quase integralmente o trabalho de Fibonacci. Além disso, foi o primeiro autor que estudou problemas relacionados aos jogos de azar e também estudou o problema dos pontos (divisão da aposta), o qual resolve incorretamente, tal problema virá a ser resolvido por Pascal e Fermat, iniciando o início da Teoria da Probabilidade.

Tartaglia, em 1556, em sua obra *General Trattato*, dedicou algumas páginas aos problemas de Pacioli, entre eles o problema dos pontos.

> Um exemplo do problema dos pontos é ilustrado pela seguinte formulação dada por Pascal: Um jogo equitativo termina quando um dos jogadores vencer seis partidas. Suponha-se que por algum motivo, o jogo tenha que ser interrompido quando o primeiro jogador tenha vencido cinco partidas e o segundo apenas três. Como as apostas devem ser repartidas? Tartaglia argumentou que a divisão deveria ser 5:3, que não é correta. A solução correta para este problema foi dada mais tarde por Fermat e também por Pascal. (VIALI, 2008, p. 146)

Segundo THEBAS *et al* (2015), o que levou Pascal a começar o estudo da probabilidade foi um questionamento de um amigo, o incansável jogador Chevalier de Méré. Ele acreditava que a probabilidade de duas jogadas era a mesma: obter pelo menos uma face 6 em quatro lançamentos consecutivos de um dado ou duas faces 6 em quatro lançamentos consecutivos de dois dados, porém, perdia com mais frequência na segunda jogada.

Figura 1 - Raciocínio de Chevalier de Méré

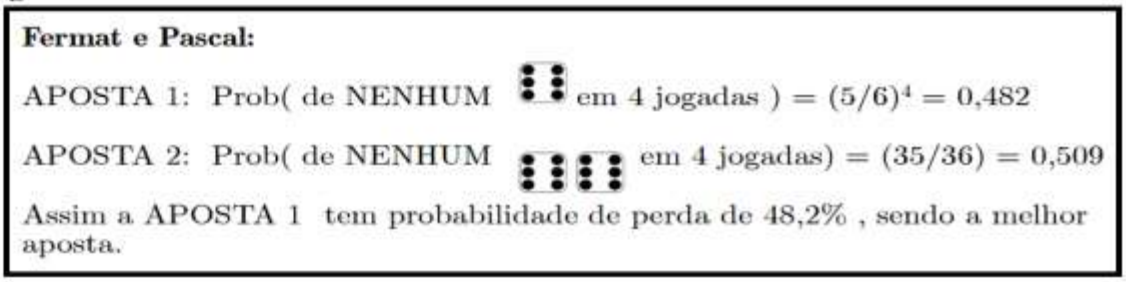
RACIOCíNIO (ERRADO) DO JOGADOR:

APOSTA 1: Prob(pelo menos 1 em 4 jogadas) = $4\times(1/6) = 2/3$

APOSTA 2: Prob(pelo menos em 24 jogadas) = $24 \times(1/36) = 2/3$

Fonte: VICENTE, 2009 *apud* THEBAS *et al*, 2015, p. 4.

Figura 2 - Raciocínio de Fermat e Pascal



Fermat e Pascal:

APOSTA 1: Prob(de NENHUM em 4 jogadas) = $(5/6)^4 = 0{,}482$

APOSTA 2: Prob(de NENHUM em 4 jogadas) = $(35/36) = 0{,}509$

Assim a APOSTA 1 tem probabilidade de perda de 48,2% , sendo a melhor aposta.

Fonte: VICENTE, 2009 *apud* THEBAS *et al*, 2015, p. 5.

Devemos atentar-nos que, assim como são importantes no processo de ensino/aprendizagem, os erros e a análise destes contribuem para o desenvolvimento da ciência.

Em sua investigação, Pascal encontra solução para o problema da divisão dos pontos:

> Em uma das cartas de Pascal para Fermat, eles discutem o seguinte problema: dois jogadores disputam um jogo de três pontos no qual cada um fez uma aposta de 32 *pistoles*. Como a aposta deve ser dividida se eles decidirem ou tiverem de interromper o jogo antes do final? (ambos assumiam que os dois jogadores tinham habilidades equivalentes). A solução proposta por Pascal, embora sem certeza, foi analisar todas as possibilidades futuras do desenvolvimento do jogo. Assim, ele supôs que o primeiro jogador tenha ganhado dois pontos e o primeiro apenas um. Eles agora precisam disputar um ponto nessa situação. Se o primeiro jogador ganha ele leva toda a aposta (as 64 moedas) e se o segundo ganha, cada um terá então dois pontos, estando iguais. Caso eles parem de jogar, cada um ficará com 32 moedas. Então, se o primeiro ganhar, 64 moedas serão dele, e se ele perder, 32 serão dele. Logo, se eles encerrarem o jogo nas condições acima, o primeiro jogador poderá argumentar: “eu já tenho garantido 32 moedas, mesmo que eu perca esta rodada, e das 32 restantes eu tenho chances iguais de ganhar ou perder, então vamos dividi-las igualmente. Assim meu prêmio será as 32 que tenho direito mais a metade das restantes, num total de 48 moedas. O teu prêmio será de 16 moedas”. Suponha agora que o primeiro jogador tenha ganhado

> dois pontos e o segundo nenhum e vão disputar um ponto. A situação é que, se o primeiro jogador ganha, ele leva todo o prêmio e se o segundo ganhar ele estará na condição que foi discutida acima, isto é, onde o primeiro leva 48 moedas e o segundo apenas 16. Portanto, se eles quiserem encerrar o jogo nessas condições, o primeiro jogador poderá argumentar que: "se eu ganhar este ponto eu levo todas as moedas, mas se perder eu já tenho garantido 48 moedas. Eu fico com as 48 mais a metade das restantes, pois as chances de que cada um ganhe este ponto são iguais. Dessa forma, o primeiro jogador deve ficar com 56 moedas e o segundo com as 8 restantes". A última situação seria aquela em que o primeiro jogador tenha ganhado um ponto e o segundo nenhum. Se eles seguissem e o primeiro jogador ganhasse, eles estariam na condição examinada acima (56 para um 8 para o outro). Se o segundo vencer eles teriam um ponto cada um e fariam jus a 32 moedas cada. Assim, se eles não jogarem, o primeiro jogador poderá argumentar: "eu fico com as 32 e vamos dividir as 56 – 32 = 24 igualmente. Então, a minha parte será 32 + 12 = 44". Acima está o essencial sobre o que Pascal escreveu para Fermat nesta carta, sobre este problema específico. (VIALI, 2008, p. 148 e 149).

VIALI (2008) afirma que a História da Matemática é uma área muito bem desenvolvida, onde encontramos muitos trabalhos entretanto, segundo o autor, na história da probabilidade as pesquisas são escassas. Além disso, salienta que os poucos trabalhos que existem na área, na maioria das vezes, fundem a teoria das probabilidades à estatística.

Em seu artigo "Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade", Viali (2008) traça detalhadamente um panorama da área da matemática que alguns denominam: teoria da probabilidade, cálculo de probabilidades, ou probabilidade, separadamente da estatística.

Não nos surpreende que os primeiros cálculos probabilísticos estejam relacionados aos jogos, uma vez que, esses justificariam a intuição de jogadores, ou seja, quando alguém faz uma aposta, toma sua decisão intuindo qual seria sua chance de ganhar. Em seu trabalho, VIALI (2008) diz que, mais precisamente, um jogo de dados, o Tali, em que o dado era um astrálago, um osso de carneiro que se assemelhava a um tetraedro, pois suas faces eram numeradas com 1, 3, 4 e 6, e as quatro faces não eram equiprováveis.

Figura 3 – Astrálago (osso de animal)

Fonte: VIALI, 2008, p. 144

> As faces maiores eram numeradas com 3 e 4 e as duas menores por 1 e 6. Alguns experimentos conduzidos chegaram à conclusão de que as frequências de ocorrências das quatro faces do osso do jogo do Tali apresentavam os seguintes resultados:

Faces	1	3	4	6
Frequências	0,12	0,37	0,39	0,12

> (VIALI, 2008, p. 144)

Esse jogo era praticado para apostas, previsão do futuro, disputas e divisão de heranças. Embora em nossa sociedade os jogos de azar sejam rechaçados por algumas parcelas da população, segundo Viali (2008) há registro de que, por volta de 960, um bispo belga tenha elaborado um jogo das virtudes, na qual cada uma das 56 virtudes era atribuída a um dos possíveis resultados do lançamento de três dados. Entretanto, o autor não detalha a natureza desses dados, mas, intrigamo-nos a respeito de como deveriam ser os três dados para que o espaço amostral tenha 56 elementos.

Os gregos e romanos jogavam quatro astrágalos; o melhor jogo consistia em quatro faces diferentes voltadas para cima, o que denominavam jogada de Vênus, e o pior jogo consistia em quatro faces 1 voltadas para cima, resultado denominado “os cães”. Perguntamo-nos, então: será que é daí que vem a expressão “vida de cão”?

Viali (2008) também apresenta em seu trabalho que o desenvolvimento da probabilidade se deu à demanda requerida pelos seguros: tal prática iniciou-se provavelmente com comerciantes mesopotâmicos e fenícios que usavam probabilidade para calcular prêmio de seguros associados a cargas de navio perdidas por naufrágios ou roubos. Segundo o autor, a prática teve continuação com gregos e romanos e, no mundo moderno com os comerciantes italianos.

> Em 1663, foi publicado o trabalho *Degrees of Mortality of Mankind*, o primeiro sobre seguros de vida, por Edmond Halley (1656-1742), que tem um cometa batizado em sua homenagem. Anteriormente, Cardano, em 1570, fez uma tentativa de estudar matematicamente os seguros de vida na obra *De proportionibus Libri V*, no entanto, sem alcançar repercussão. Halley mostrou como determinar o prêmio (a anuidade) de um seguro em termos da esperança de vida e da probabilidade de sobrevida. Os seguros alcançaram o amadurecimento matemático com Daniel Bernoulli (1700 - 1782), sobrinho de Jacob (James ou Jacques) Bernoulli (1654 – 1705). Hoje o mercado está sofisticado a ponto de absorver boa parte dos formados na área de matemática (VIALI, 2008, p. 145).

Para termos um panorama cronológico das publicações acerca do estudo da probabilidade, de acordo com Viali (2008) e Maistrov (1973), construímos três linhas do tempo: uma para a infância do estudo da probabilidade, outra para sua adolescência, e uma última para sua fase adulta. Porém, ainda devemos lembrar que as primeiras contribuições acerca de probabilidade vieram dos gregos e romanos, contribuições essas estariam associadas à pré-história do estudo da probabilidade.

Figura 4 - Linha do tempo 1: A História da Probabilidade (Infância)

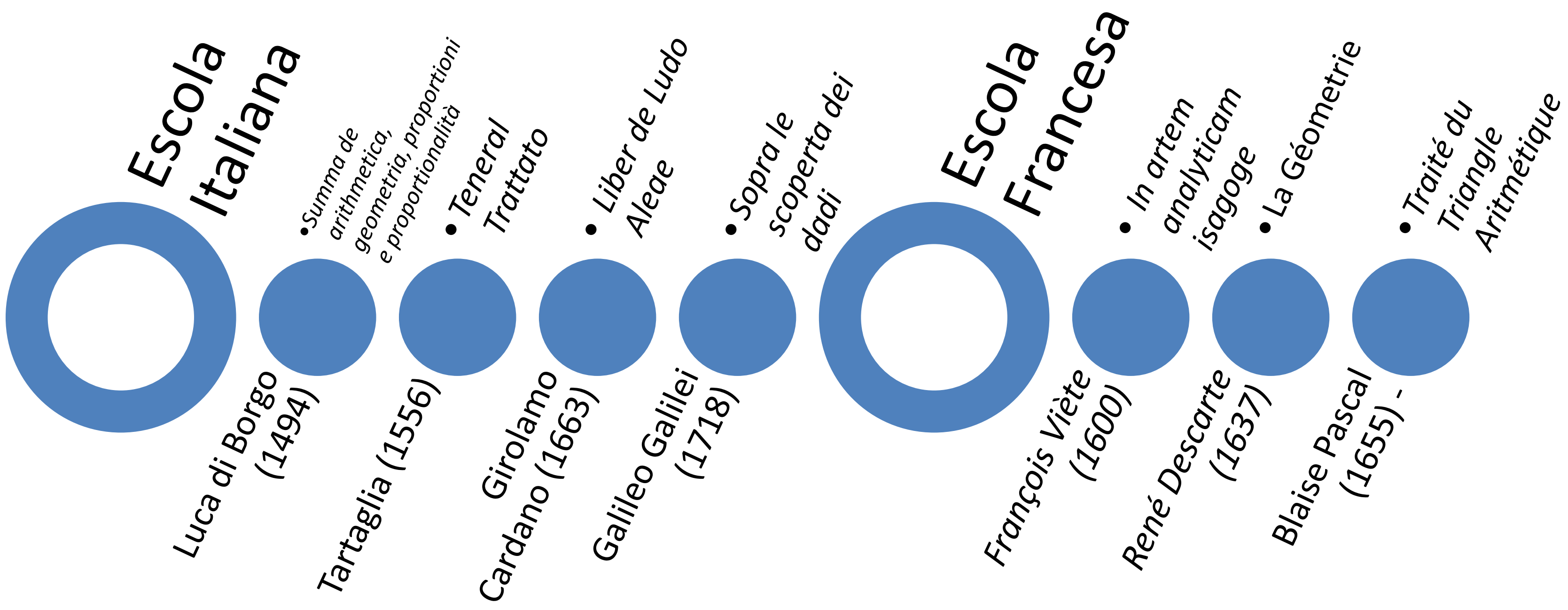


Figura 5 - Linha do Tempo 2: A História da Probabilidade (Adolescência)

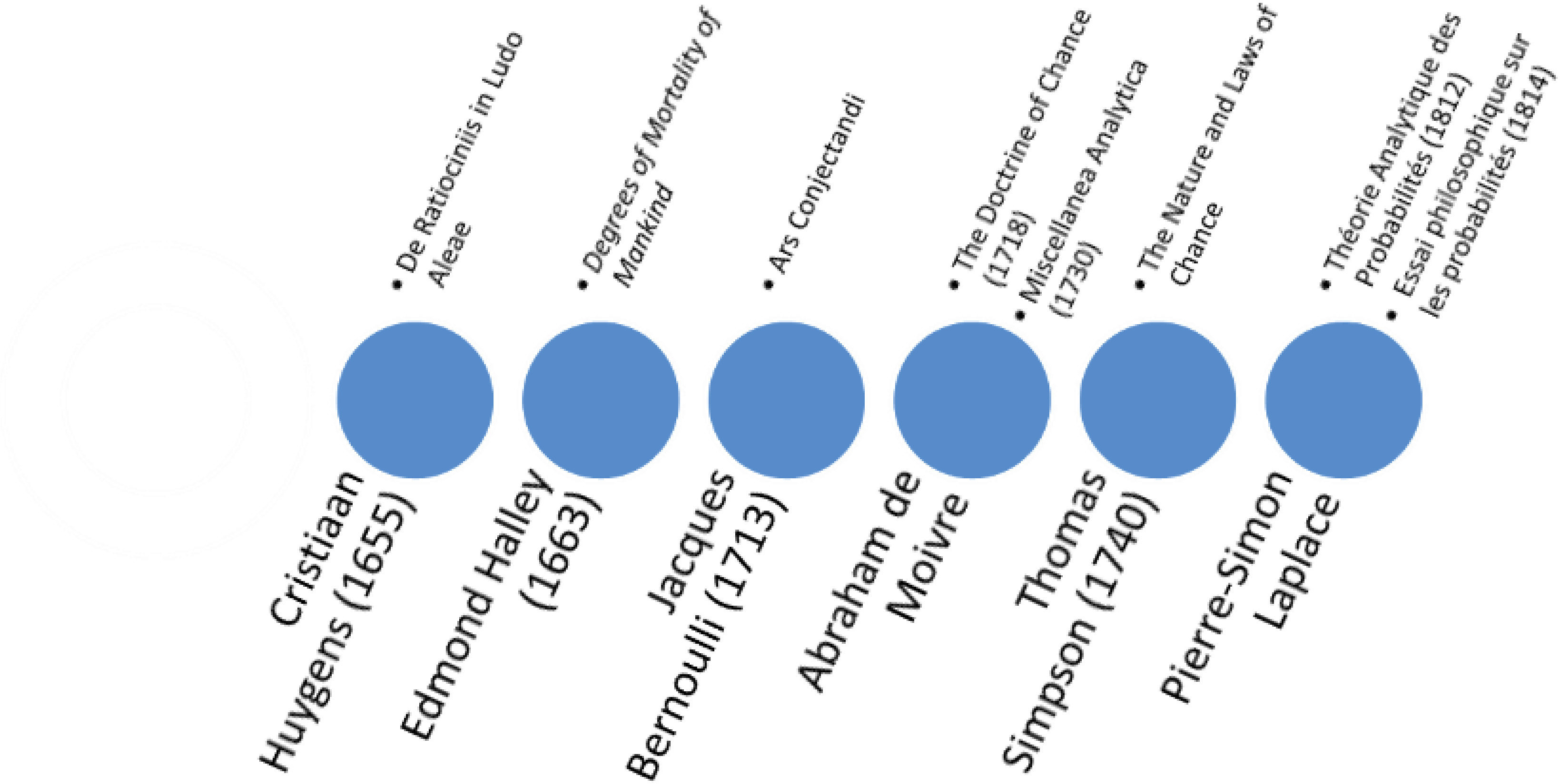
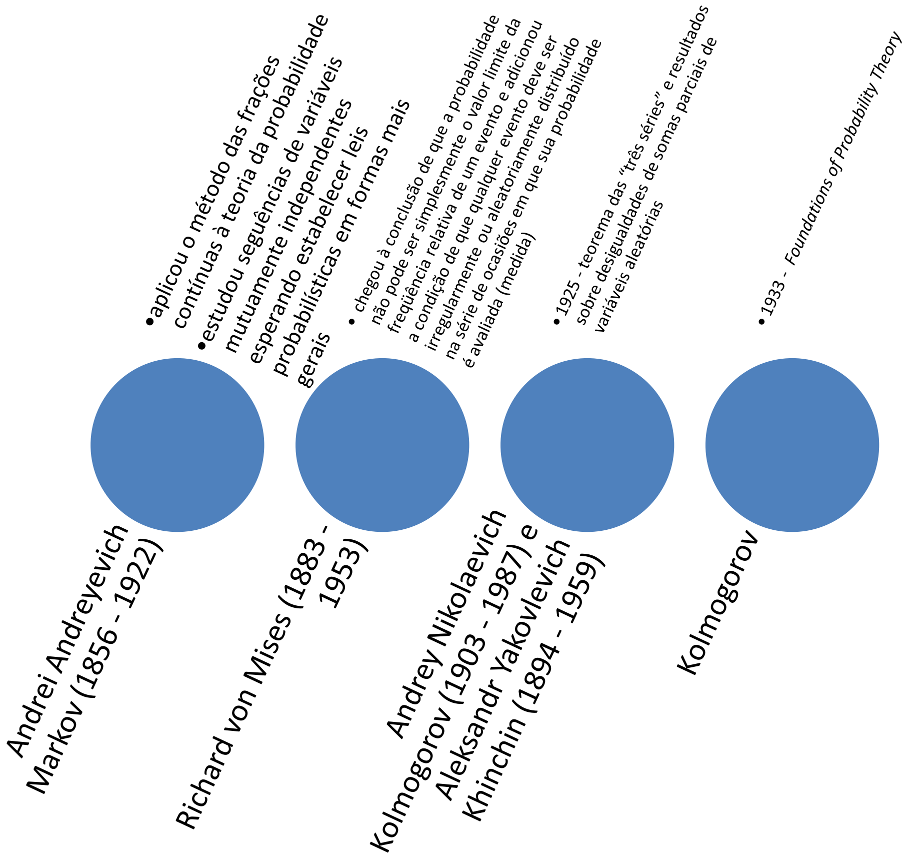


Figura 6 - Linha do Tempo 3: A História da Probabilidade (A Idade Adulta)



4 OS OBJETOS MATEMÁTICOS

4. 1 Técnicas de contagem

A análise combinatória, segundo Paiva (2015), tem por objetivo principal conhecer métodos de contagem que nos permitam atingir resultados mais rapidamente, haja vista que, contar um a um, em muitas situações, não é viável. Entretanto, segundo Batanero *et al.* (1997),

> O propósito da análise combinatória é muito mais amplo do que simplesmente resolver permutação, arranjos e problemas de combinação. Em seu trabalho "Ars Conjectandi", Bernoulli descreveu a combinatória como a arte de enumerar todas as maneiras possíveis como um determinado número de objetos podem ser misturados e combinados, de modo a garantir que não faltará qualquer resultado possível. Segundo Hart (1992), a análise combinatória é a matemática da contagem. Ela está preocupada com problemas que envolvem um número de elementos (conjuntos discretos), com os quais realizamos diferentes operações. Algumas dessas operações modificam somente a estrutura do conjunto, por exemplo, uma permutação de seus elementos, enquanto, outras, a composição do conjunto (tirando uma amostra). Geralmente estamos interessados em uma configuração combinatória ou composição do resultado de algumas dessas operações. (*Traduzido e adaptado de* BATANERO *et al*., 1997, p. 239 e 240)

Entre muitos estudos em relação ao ensino de análise combinatória, Batanero (1997), evidencia que iniciar o ensino do tema ainda no Ensino Fundamental, fazendo uso da construção de agrupamentos, não necessariamente formalizando o estudo, pode facilitar a abordagem do assunto no Ensino Médio. Os alunos, quando não têm precedentes de contato com o tema, têm maior dificuldade posteriormente.

> Ao trabalhar com tal assunto, é importante analisar as etapas seguidas pelos alunos para solucionar as situações-problema dos combinatórios e valorizar todos os modos de pensamento. (BATANERO, 1997)

Nesse sentido, para aprofundarmos os métodos de estudo no tema, assim como tratar da autonomia de um aluno em solucionar o problema matemático, compreenderemos as probabilidades calculadas ao longo deste trabalho e conheceremos algumas técnicas de contagem.

Explanaremos sobre elas através de algumas definições nas próximas seções.

4. 1. 1 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem (PFC)

De acordo com Morgado e Carvalho (2015):

> O princípio fundamental da contagem diz que se há *x* modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há *y* modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é *xy*. (MORGADO e CARVALHO, 2015. p. 108)

Segundo Morgado *et al* (1991, p. 2), análise combinatória é a área da Matemática na qual podemos apresentar, frequentemente, problemas de duas naturezas em seu estudo. São eles: admitir a existência de subconjuntos de elementos de um dado conjunto finito e contar, ou classificar, os subconjuntos desse conjunto finito, ambos quando satisfazem determinadas condições.

Já o PFC, para Borba e Braz (2012), é uma estratégia válida, também, para problemas que apresentem condições específicas de resolução, visto que, a aplicação direta da fórmula nem sempre é a mais adequada para estes casos como, por exemplo, quando desejamos aceitar a repetição de elementos. E no que se refere a esses problemas, as autoras afirmam que o PFC é uma estratégia válida em diferentes situações como condições de ordem, de proximidade e de escolha implícita ou explícita de elementos. Portanto, o uso de fórmulas, nesses casos, poderia ser um dificultador da resolução de problemas combinatórios.

Sobre os conceitos aqui explorados, segundo Borba (2013, p. 4), as definições abaixo são imprescindíveis para a aprendizagem do objeto análise combinatória e, posteriormente, de probabilidade:

- *Arranjo:* os elementos são escolhidos a partir de um conjunto único, mas não necessariamente todos os elementos constituem as possibilidades a serem enumeradas, neste caso a ordem dos elementos escolhidos indica possibilidades distintas*;*

- *Combinação:* são escolhidos alguns elementos de um conjunto único e a ordem em que os elementos aparecem não indica possibilidades distintas, assim como, no arranjo, não há a obrigatoriedade de utilização de todos os elementos;

• *Permutação:* todos os elementos do conjunto dado são utilizados em distintas ordens.

Exemplo 4.1.1.: Considerando as 40 cartas do baralho espanhol utilizado no truco paulista (do baralho francês tradicional com 52 cartas, inutilizam-se as cartas 8, 9 e 10), de quantas formas pode-se distribuir 4 cartas sendo uma carta para cada um de quatro jogadores?

A distribuição pode se dar da seguinte maneira:

1º jogador: 40 possibilidades de carta

2º jogador: 39 possibilidades de carta

3º jogador: 38 possibilidades de carta

4º jogador: 37 possibilidades de carta

Assim, o número de formas de efetuar essa distribuição é: $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 2193360$. É importante salientar que, quando calculamos quantos agrupamentos com tais características teremos, pelo princípio fundamental da contagem, estamos levando em conta a ordem, portanto, contamos como eventos diferentes o 1º jogador receber um ás de paus, o 2º jogador receber um 2 de copas, o 3º jogador receber um 3 de ouros e o 4º jogador receber uma dama de espadas de 1º jogador receber a dama de espadas, o 2º jogador receber o 3 de ouros, o 3º jogador receber o ás de paus e o 4º jogador receber o 2 de copas.

4. 1. 2 Arranjo simples

Segundo Paiva(2015):

> Arranjos são agrupamentos nos quais a ordem dos elementos é considerada. Qualquer mudança na ordem dos elementos distintos altera o agrupamento. (PAIVA, 2015, p. 375)

Também podemos resolver o exemplo anterior utilizando a fórmula de arranjo simples. Calcula-se assim:

$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, onde n é o número de elementos disponíveis e p o número de elementos a serem distribuídos no grupo.

Então, no exemplo 3.1.1., o número de maneiras de distribuir 4 cartas dentre 40 uma para cada jogador é $A_{40,4} = \frac{40!}{(40-4)!} = \frac{40!}{36!} = \frac{40 \cdot 39.38.37.\cancel{36!}}{\cancel{36!}} = 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 2193360$.

4. 1. 3 Combinação simples

MORGADO e CARVALHO enunciam combinação simples com um problema:

> *Problema das combinações simples:* De quantos modos podemos selecionar *p* objetos distintos entre *n* objetos distintos dados?
> Cada seleção de *p* objetos é chamada de uma combinação linear simples de classe *p* dos *n* objetos. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos *a, b, c, d* e *e* são *{a, b, c}*, *{a, b, d}*, *{a, b, e}*, *{a, c, d}*, *{a, c, e}*, *{a, d, e}*, *{b, c, d}*, *{b, c, e}*, *{b, d, e}* e *{c, d, e}*. Representamos o número de combinações simples de classe *p* de *n* elementos por C_n^p ou $C_{n,p}$.
> Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar *p* entre os *n* objetos equivale a dividir os *n* objetos, que são selecionados, e um grupo de *n-p* objetos, que são os não selecionados.
> Esse é o problema de Exemplo 4 e a resposta é
>
> $$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$
>
> (MORGADO e CARVALHO, 2015, p. 115)

Exemplo 4.1.3.: No jogo de truco, conforme mencionado, utilizamos o baralho espanhol, com 40 cartas. Assim, quantas são as combinações de três cartas que um jogador pode ter em mãos?

Para resolvermos esse problema faremos uso de uma técnica de contagem chamada combinação simples. É uma técnica que muito se assemelha à do arranjo, porém, desconsideramos a relevância da ordem, dividindo o número de elementos calculados no arranjo pelo número de agrupamentos formados pelos mesmos elementos, em diferentes ordens:

$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!\cdot(n-p)!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}$, onde n é o número de elementos disponíveis e p o número de elementos a serem distribuídos no grupo.

Para esse exemplo, teremos: $C_{40,3} = \frac{40!}{3!\cdot(40-3)!} = \frac{40!}{3!\cdot 37!} = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot\cancel{37!}}{3!\cdot\cancel{37!}} = \frac{40\cdot 39\cdot 38}{6} = 9880$ maneiras.

É importante salientar que, das técnicas de contagem que tratamos neste trabalho, essa é a única que não dá relevância à ordem, ou seja, não importa em qual ordem ocorra, o que difere um agrupamento do outro são seus componentes.

4. 1. 4 Permutação simples

O conceito de permutação simples, assim como o de combinação, também é apresentado por MORGADO E CARVALHO por um exemplo:

> *Problema das permutações simples:* De quantos modos podemos ordenar em fila *n* objetos distintos?
> A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de *n* modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de *n-1* modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de *n-2* modos, etc...; a escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo.
> A resposta é $n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
> Cada ordem que se dá aos objetos é chamada de uma permutação simples dos objetos. Assim, por exemplo, as permutações simples das letras *a*, *b* e *c são (abc), (acb)*, *(bac)*, *(bca)*, *(cab)* e *(cba)*.
> Portanto, o número de permutações simples de *n* objetos distintos é $P_n = n!$. (MORGADO e CARVALHO, 2015, p. 114)

Exemplo 4.1.4.: Pela forma como embaralhou o maço, um jogador sabe exatamente quais cartas seu adversário tem em mãos. Sua estratégia deve depender da ordem em que esse seu adversário utiliza tais cartas. Assim, quantas estratégias diferentes o jogador deve elaborar?

$$P_3 = A_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6 \text{ formas}$$

De forma geral, temos: $P_n = n!$, onde n é o número de elementos disponíveis para ocuparem n posições distintas.

4.2 Probabilidade

De acordo com Viali (2008):

> A probabilidade é o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos nos quais o “acaso” representa um papel preponderante. O denominado “acaso” é um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exerce, individual ou coletivamente, papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno. Assim, ao lançarmos uma moeda, é senso comum que os possíveis resultados, exceto alguma extravagância da natureza, são “cara” e “coroa”. No entanto, até ser realizada a experiência não é possível antecipar com certeza qual dos dois possíveis resultados irá ocorrer. Isto acontece porque os fatores que determinam um deles não podem ser identificados e, caso isso ocorra, não são passíveis de controle. (VIALI, 2008, p. 143)

4.2.1 Experimentos aleatórios

Morgado e Carvalho(2015) ressaltam:

> Experiências que repetidas sob as mesmas condições produzem, geralmente, resultados diferentes, são chamadas de aleatórias. (MORGADO e CARVALHO, 2015, p 136)

Por exemplo, o lançamento de um dado inúmeras vezes apresenta resultados diferentes não previstos, trata-se de um experimento aleatório.

4.2.2 Espaço amostral

O espaço amostral, representado pela letra Ω, é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplo 4.2.2.a.: Um dado é lançado e observa-se a face voltada para cima, os resultados possíveis são Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Exemplo 4.2.2.b.: No lançamento de uma moeda, os resultados possíveis da face voltada para cima são: cara ou coroa. Então temos $\Omega = \{cara, coroa\}$.

Exemplo 4.2.2.c.: Na retirada de uma carta de um baralho espanhol, todas as possibilidades são todas as 40 cartas. Então, o número de elementos do conjunto espaço amostral é $n(\Omega) = 40$.

Evento é todo e qualquer subconjunto do espaço amostral Ω.

Exemplo 4.2.2.d.: No lançamento de uma moeda, *cara* é um evento possível.

4. 2. 3 Evento certo

Evento certo é aquele que certamente ocorrerá. A probabilidade de um evento certo A ocorrer é $p(A) = 100\% = \frac{100}{100} = 1$.

Exemplo 4.2.3.a.: Ocorrer face menor que 10 no lançamento de um dado convencional.

4. 2. 4 Evento impossível

Evento impossível é aquele impossível de ocorrer. A probabilidade de um evento impossível A ocorrer é $p(A) = 0\% = \frac{0}{100} = 0$.

Exemplo 4.2.4.a.: Ocorrer face maior que 6 no lançamento de um dado convencional.

4. 2. 5 Evento possível

Como o próprio nome diz, evento possível é um evento com possibilidade de ocorrer. A probabilidade de um evento possível A ocorrer é $0\% < p(A) < 100\% \Rightarrow 0 < p(A) < 1$.

4. 2. 6 Cálculo de probabilidade

> Definição clássica: Suponha que um evento *E* possa ocorrer de *h* maneiras diferentes, em um total de *n* modos possíveis, igualmente prováveis. Então, a probabilidade de ocorrência do evento (denominado *sucesso*) é definida por
>
> $$p = \Pr\{E\} = \frac{h}{n}$$
>
> (SPIEGEL e STEPHENS, 2009, p. 159)

Neste trabalho, utilizamos a definição clássica de probabilidade porque objetivamos o ensino da probabilidade no contexto do jogo de truco e, na retirada de uma carta do baralho de truco, todas as cartas são igualmente prováveis.

Exemplo 4.2.6.a.: Na extração de uma carta de um baralho espanhol, qual a probabilidade de obter uma carta numérica e menor que 5?

E: conjunto com todas as cartas do baralho espanhol

A: conjunto com as cartas numéricas menores que 5

Então, temos:

$\mathrm{E} = \{\mathrm{A}\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, \mathrm{J}\clubsuit, \mathrm{Q}\clubsuit, \mathrm{K}\clubsuit, \mathrm{A}\blacklozenge, 2\blacklozenge, 3\blacklozenge, 4\blacklozenge, 5\blacklozenge, 6\blacklozenge,$

$7\blacklozenge, \mathrm{J}\blacklozenge, \mathrm{Q}\blacklozenge, \mathrm{K}\blacklozenge, \mathrm{A}\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, \mathrm{J}\heartsuit, \mathrm{Q}\heartsuit, \mathrm{K}\heartsuit, \mathrm{A}\spadesuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit,$

$4\spadesuit, 5\spadesuit, 6\spadesuit, 7\spadesuit, \mathrm{J}\spadesuit, \mathrm{Q}\spadesuit, \mathrm{K}\spadesuit\}$

$n(E) = 40$

$\mathrm{A} = \{2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 2\blacklozenge, 3\blacklozenge, 4\blacklozenge, 2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit, 4\spadesuit\}$

$n(A) = 12$

Assim, a probabilidade do evento A ocorrer é $p(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$.

5 O JOGO DE TRUCO

Gomes (2014) elucida que,

> O truco é um jogo de cartas, tradicional no Rio Grande do Sul, que se originou na fronteira com os países latinos. Ele deriva do truco espanhol, que foi introduzido no Brasil pelo Rio Grande do Sul desde a época da Guerra do Paraguai, quando brasileiros do sul e argentinos se reuniam nas horas de descanso para jogar. (GOMES, 2014, p.5)

O Truco Paulista é uma variação do Truco Mineiro e se diferencia pela manilha[1] (trunfo), que varia a cada rodada. Ele é jogado com o baralho francês de 52 cartas, do qual removemos as cartas 8, 9 e 10, obtendo as 40 cartas necessárias para jogar. Esse conjunto é conhecido como Baralho Espanhol.

5. 1 As regras do jogo de truco

As regras do jogo de Truco Paulista detalhadas neste trabalho são uma coletânea entre informações obtidas em sites, livros indicados nas referências bibliográficas e por jogadores de truco que nos ajudaram, esclarecendo nossas dúvidas.

No jogo do Truco Paulista são realizadas partidas corridas, até que o jogador (ou a dupla) obtenha 12 tentos (pontos). Em cada partida são distribuídas três cartas para cada jogador. Um dos participantes será “o mão”, isto é, o jogador responsável por jogar a primeira carta.

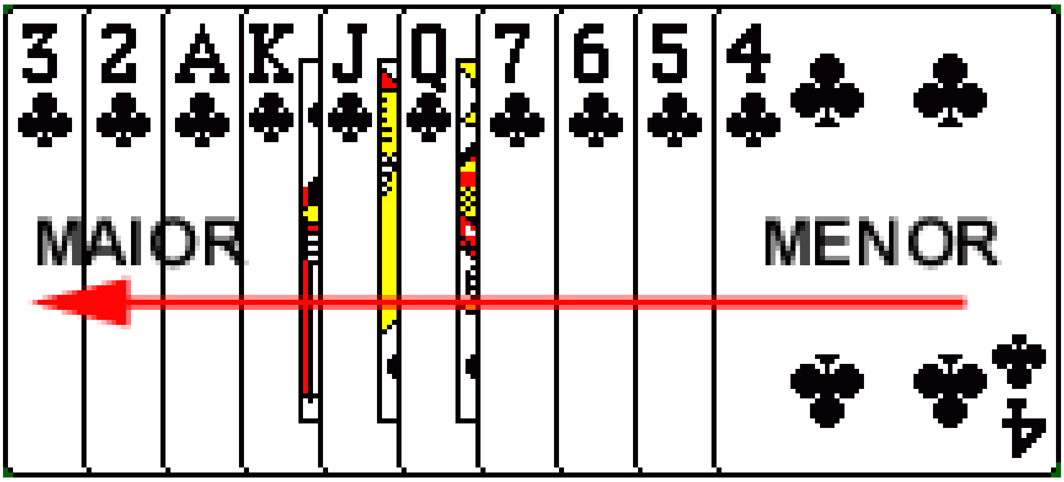
Na primeira rodada, o mão é o jogador à direita do jogador que distribuiu as cartas e, a partir da segunda rodada, o mão é o jogador que ganhou a rodada anterior. As partidas são formadas por três rodadas, começadas pelo jogador mão, e em cada uma delas, o jogador abre uma carta na mesa. Vence aquele que tiver a mais forte.

[1] Manilha: carta, de qualquer naipe, imediatamente maior que o vira, onde o vira é a carta virada sobre a mesa. Exemplo: se o vira é a dama de paus, os duques ou valetes de todos os naipes serão manilhas. E o duque de paus será o zap, isto é, a carta mais forte do jogo.

5. 1. 1 Força das cartas

A força das cartas, da maior para a menor, independente do “vira”, este é, a carta extraída do baralho e virada sobre a mesa a partir da qual determinam-se as manilhas é pré-fixada e apresentada na figura abaixo.

Figura 7 - Força das cartas de paus no baralho espanhol usado no truco



Fonte: exterminador-patos-jogatina.webnode.com.br acessado em 10/10/2018

Nesse caso, os naipes não têm importância, pois, a força das cartas independente do vira, é igual para todos os naipes. O vencedor é o jogador ou dupla que vencer duas das rodadas.

No truco, é fundamental ter em mente a força das cartas, porque ela é diferente do comum e serve para derrotar o adversário. A força das cartas é pré-definida, mas também variável, em função do vira, que é a carta aberta após distribuição das cartas aos jogadores.

O vira, conforme explicado anteriormente, determina as manilhas, as quais serão as 4 cartas de maiores valores do jogo, de acordo com os naipes, em ordem decrescente: paus, copas, espadas e ouros.

Exemplo: Se o vira é um 4, as manilhas serão todas as quatro cartas 5 do jogo, em ordem decrescente de pontuação. As manilhas são o 5 de paus, o 5 de copas, o 5 de espadas e o 5 de ouros, a maior carta do jogo, no caso o 5 de paus, é denominado “zap”.

5. 1. 2 Repiques

O Truco pode ser repicado, aumentando o valor das apostas. O direito do repique sempre é do jogador desafiado.

O repique é um desafio lançado pelo jogador 1 ao adversário, o jogador 2; quando o faz, o jogador 1 propõe/desafia que a partida valha maior pontuação.

Tabela 2: Tentos do truco

Desafio	Repique	Não quero	Quero
Truco		1 tento	3 tentos
Truco	Seis	3 tentos	6 tentos
Seis	Nove	6 tentos	9 tentos
Nove	Doze	9 tentos	12 tentos

Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Truco_paulista acessado em 10/10/2018.

Quando o jogador 1 “truca” o jogador 2, ele o desafia propondo que a partida valha 3 tentos (pontos). As possibilidades de resposta para o jogador 2 são:

- mandar cair (quero): a rodada passa a valer 3 tentos;
- pedir 6 (repicar): desafia o jogador 1 propondo que a rodada valha 6 tentos;
- fugir (não quero): não aceitar o desafio proposto e o jogador 1 ganha 1 tento;

Caso o jogador 2 opte por “pedir 6”, o jogador 1 responderá uma das três opções:

- mandar cair (quero): a rodada passa a valer 6 tentos;
- pedir 9 (repicar): desafia o jogador 1 propondo que a rodada valha 9 tentos;
- fugir (não quero): não aceitar o desafio proposto e o jogador 2 ganha 3 tentos;

Se dentre as opções anteriores o jogador 1 “pediu 9”, o jogador 2 decidirá entre:

- mandar cair (quero): a rodada passa a valer 9 tentos;

- pedir 12 (repicar): desafia o jogador 1 propondo que a rodada valha 12 tentos;
- fugir (não quero): não aceitar o desafio proposto e o jogador 1 ganha 6 tentos;

Supondo que o jogador 2 tenha se rendido à disputa e pedido 12, restará ao jogador 1 as opções:

- mandar cair (quero): a rodada passa a valer 12 tentos, isto é, a pontuação da partida;
- fugir (não quero): não aceitar o desafio proposto e o jogador 2 ganha 9 tentos.

5. 1. 3 Manilhas

As manilhas (trunfos) variam conforme a carta virada do baralho no início de cada partida/mão. Vira-se uma carta do baralho e deixa-se a mesma visível no meio da mesa, sob o baralho virado. A carta imediatamente superior à carta virada determina as manilhas da partida em questão. Se a carta virada for um ás, as manilhas são as cartas com 2. Portanto, as manilhas são as cartas que valem mais do que todas as outras naquela partida.

O naipe da carta virada não tem importância, apenas as manilhas tem valor (peso) para o jogo, este segue a seguinte ordem de naipes:

Tabela 3: Valores (pesos) das manilhas

Manilha	Valor para o jogo
Manilha de paus ♣ (zap)	13 pontos
Manilha de copas ♥ (escopeta)	12 pontos
Manilha de espadas ♠ (espadilha)	11 pontos
Manilha de ouro ♦ (pica fumo)	10 pontos

Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Truco_paulista acessado em 10/10/2018.

5. 1. 4 Critérios de desempate

- Quem vencer a primeira rodada possui vantagem em caso de empate nas outras duas rodadas.
- Em caso de empate na primeira rodada, o vencedor da segunda é o vencedor da mão.
- Sempre que houver empate, a vez de jogar é do jogador mão.
- Em caso de empate em todas as rodadas, o mão será o vencedor.

O *truco* pode ser "gritado" por qualquer jogador em qualquer momento da partida, e se nenhum jogador gritar “truco”, o valor da partida vale 1 tento.

5. 1. 5 Pontuação para a mão

Tabela 4: Pontuação (peso das cartas) para a mão

Carta	Valor para a mão
3s	9 pontos
2s	8 pontos
Ases	7 pontos
Reis	6 pontos
Valetes	5 pontos
Damas	4 pontos
7s	3 pontos
6s	2 pontos
5s	1 ponto
4s	0

Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Truco_paulista acessado em 10/10/2018.

6 A PROBABILIDADE NO JOGO DE TRUCO

Nesse capítulo, serão estabelecidos alguns cenários e, então, calcularemos a probabilidade de um jogador vencer uma rodada dado um determinado cenário. Não iremos considerar as possibilidades envolvendo desafios/repiques e consideraremos apenas rodadas entre dois jogadores, sendo o segundo jogador da mão quem sempre jogará a menor carta, forte o suficiente para ganhar a mão ou, caso não a possua, a carta mais fraca que tenha em mãos.

As probabilidades a serem calculadas ao longo deste trabalho serão para um jogo que se assemelha ao truco paulista, em que os dois jogadores jogam com cartas viradas e, para tentar ganhar cada rodada, sempre descartam a menor carta suficiente para isso. No caso de não tê-la em mãos, descartam sua menor carta.

6. 1 Alguns cenários

Os cenários elencados nesse trabalho foram sugeridos por jogadores de truco: os abordamos, solicitamos cenários que julgavam interessantes por qualquer motivo e os questionamos sobre sua intuição acerca do vencedor da partida. Obtivemos o que segue:

Cenário 6.1.1

Cartas do Jogador X: A♣, 2♦ e 6♥

Cartas do Jogador Y: 3♥, 2♣ e J♦

Vira: K

Manilhas: A♣, A♥, A♠ e A♦

Zap: A♣

Figura 8 – Fluxograma Cenário 6.1.1 (Jogador X dá as cartas, jogador Y é o mão)

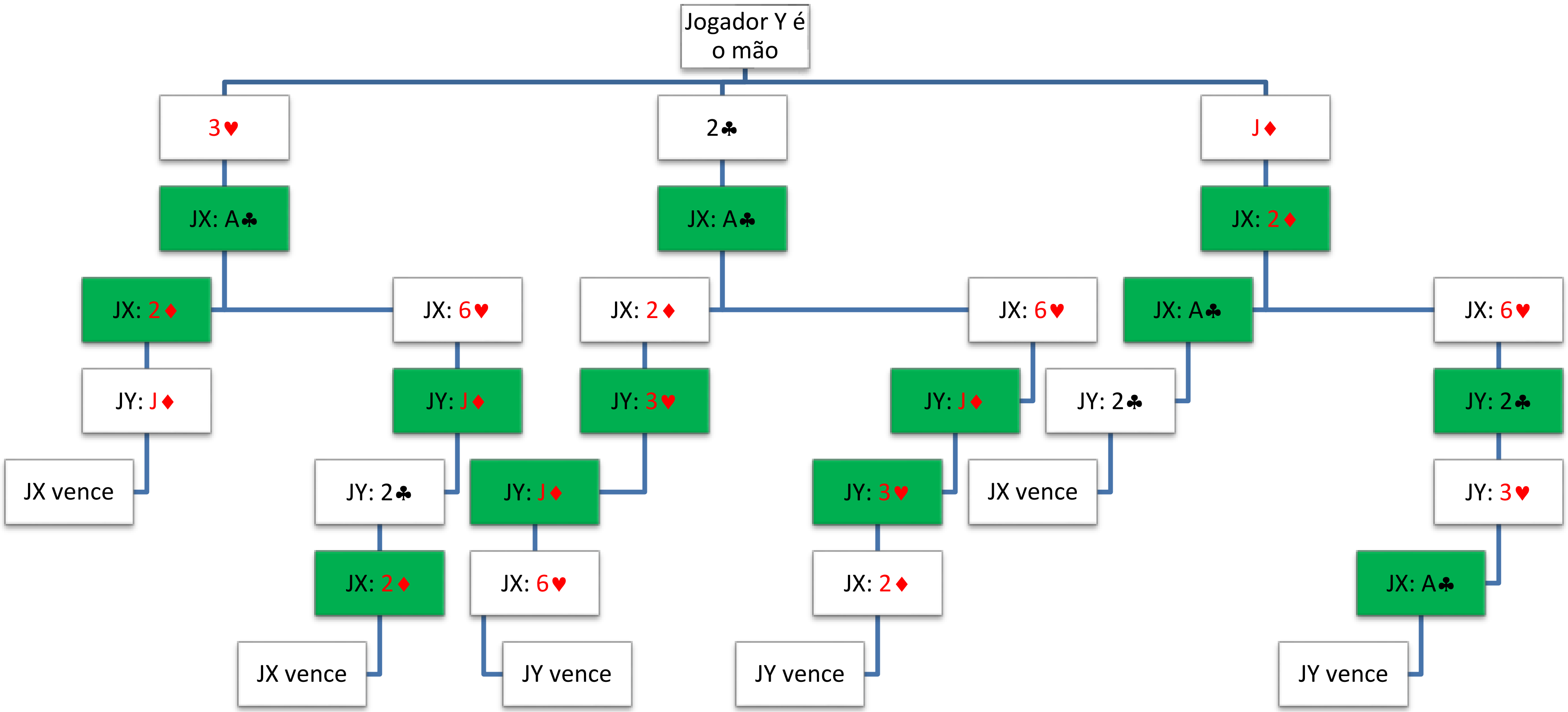


Tabela 5: Cenário 6.1.1 (Jogador X dá as cartas, jogador Y é o mão)

Primeira rodada		Segunda rodada		Terceira rodada		Vencedor
Jogador Y	**Jogador X**					
3♥	A♣	JX: 2♦	JY: J♦	-	-	JX
3♥	A♣	JX: 6♥	JY: J♦	JY: 2♣	JX: 2♦	JX
2♣	A♣	JX: 2♦	JY: 3♥	JY: J♦	JX: 6♥	JY
2♣	A♣	JX: 6♥	JY: J♦	JY: 3♥	JX: 2♦	JY
J♦	2♦	JX: A♣	JY: 2♣	-	-	JX
J♦	2♦	JX: 6♥	JY: 2♣	JY: 3♥	JX: A♣	JX

Fonte: Elaborado pela autora

Legenda:

JX: Jogador X

JY: Jogador Y

: Vencedor da rodada

Para o cenário descrito acima vemos que, são 6 os resultados possíveis; em 4 deles o Jogador X vence a rodada e em 2 deles o jogador Y é quem vence. Assim, temos que, a probabilidade do jogador X ganhar a rodada é $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=0,\overline{6}=66,\overline{6}\%$, enquanto a probabilidade do jogador Y ganhar a rodada é $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0,\overline{3}=33,\overline{3}\%$.

Cenário 6.1.2

Tabela 6: Cenário 6.1.2 (Jogador Y dá as cartas, jogador X é o mão)

Primeira rodada		Segunda rodada		Terceira rodada		Vencedor
Jogador X	**Jogador Y**					
A♣	J♦	JX: 2♦	JY: 3♥	JY: 2♣	JX: 6♥	JY
A♣	J♦	JX: 6♥	JY: 2♣	JY: 3♥	JX: 2♦	JY
2♦	3♥	JY: 2♣	JX: A♣	JX: 6♥	JY: J♦	JY
2♦	3♥	JY: J♦	JX: A♣	JX: 6♥	JY: 2♣	JY
6♥	J♦	JY: 3♥	JX: A♣	JX: 2♦	JY: 2♣	JY
6♥	J♦	JY: 2♣	JX: A♣	JX: 2♦	JY: 3♥	JY

Fonte: Elaborado pela autora

Já para o cenário 6.1.2 descrito, obtivemos 6 resultados possíveis, dentre os quais, em todos eles o Jogador Y vence a rodada, e em nenhum deles o jogador X vence a rodada. Então, nesse segundo cenário, a probabilidade do jogador X ganhar a rodada é $\frac{0}{6}=0=0\%$, enquanto a probabilidade do jogador Y ganhar a rodada é $\frac{6}{6}=1=100\%$. Notemos que, a probabilidade de X ou Y ganhar difere dependendo de X ou Y ser o jogador mão, mesmo X tendo o “zap”.

Sabemos que o jogador X vence em duas situações: quando ele é mão e vence ou quando o jogador Y é mão e o jogador X vence. Calculamos assim:

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ X\ \acute{e}\ m\tilde{a}o} \quad e \quad \overbrace{\frac{0}{6}}^{Jogador\ X\ vence\ quando\ ele\ \acute{e}\ m\tilde{a}o} \quad ou \quad \overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ Y\ \acute{e}\ m\tilde{a}o} \quad e \quad \overbrace{\frac{2}{3}}^{Jogador\ X\ vence\ quando\ Y\ \acute{e}\ m\tilde{a}o} \quad =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=$$

$$\frac{0}{12}+\frac{2}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Obtendo que a probabilidade do jogador X vencer, dado o cenário 1, é $\frac{1}{3}=0,\overline{3}=33,3\%$.

Para o jogador Y vencer, também temos as mesmas duas situações: ele é mão e vence, ou o jogador X é mão e o jogador Y vence, calculamos:

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ Y\ \acute{e}\ m\tilde{a}o} \quad e \quad \overbrace{\frac{2}{6}}^{Jogador\ Y\ vence\ quando\ ele\ \acute{e}\ m\tilde{a}o} \quad ou \quad \overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ X\ \acute{e}\ m\tilde{a}o} \quad e \quad \overbrace{\frac{6}{6}}^{Jogador\ Y\ vence\ quando\ X\ \acute{e}\ m\tilde{a}o} \quad =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{6}=$$

$$\frac{2}{12}+\frac{6}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

Observem que, a probabilidade de Y ganhar é $\frac{2}{3}=0,\overline{6}=66,\overline{6}\%$, probabilidade esperada já que o jogador Y ganhar é o evento complementar ao jogador X ganhar, logo, a soma de suas probabilidades de ocorrência é 1=100%.

Cenário 6.2.1

Cartas do Jogador X: A♣, A♥ e 5♥

Cartas do Jogador Y: A♠, A♦ e 3♦

Vira: K

Manilhas: A♣, A♥, A♠ e A♦

Zap: A♣

Tabela 7: Cenário 6.2.1 (Jogador X dá as cartas, jogador Y é o mão)

Primeira rodada		Segunda rodada		Terceira rodada		Vencedor
Jogador Y	**Jogador X**					
A♦	A♥	JX: A♣	JY: 3♦	-	-	JX
A♦	A♥	JX: 5♥	JY: 3♦	JY: A♠	JX: A♣	JX
A♠	A♥	JX: A♣	JY: 3♦	-	-	JX
A♠	A♥	JX: 5♥	JY: 3♦	JY: A♦	JX: A♣	JX
3♦	A♥	JX: A♣	JY: A♠	-	-	JX
3♦	A♥	JX: 5♥	JY: A♦	JY: A♠	JX: A♣	JX

Fonte: Elaborado pela autora

Notamos que, no cenário 6.2.1, o jogador X sempre ganhará a rodada, portanto, é impossível que o jogador Y ganhe neste caso.

Calculemos agora as probabilidades num cenário ao qual chamei 6.2.2, idêntico ao 6.2.1, exceto pelo fato de o mão ser o jogador X.

Cenário 6.2.2

Tabela 8: Cenário 6.2.2 (Jogador Y dá as cartas, jogador X é o mão)

Primeira rodada		Segunda rodada		Terceira rodada		Vencedor
Jogador X	**Jogador Y**					
A♣	3♦	**JX:** A♥	**JY:** A♦	-	-	**JX**
A♣	3♦	**JX:** 5♥	**JY:** A♦	**JY:** A♠	**JX:** A♥	**JX**
A♥	3♦	**JX:** A♣	**JY:** A♦	-	-	**JX**
A♥	3♦	**JX:** 5♥	**JY:** A♦	**JY:** A♠	**JX:** A♣	**JX**
5♥	3♦	**JY:** A♦	**JX:** A♥	**JX:** A♣	**JY:** A♠	**JX**
5♥	3♦	**JY:** A♠	**JX:** A♥	**JX:** A♣	**JY:** A♦	**JX**

Fonte: Elaborado pela autora

Concluímos então, que, para a distribuição jogador X com as cartas: A♣, A♥ e 5♥, jogador Y com as cartas: A♠, A♦ e 3♦ e o vira qualquer um dos quatro K’s, temos que o jogador X sempre vencerá, independentemente de ser ele ou não o jogador mão, bem como, isso é independente de suas ações e das do jogador Y.

Cenário 6.3.1

Cartas do Jogador X: A♣, A♠ e 4♥

Cartas do Jogador Y: A♥, A♦ e 3♦

Vira: K

Manilhas: A♣, A♥, A♠ e A♦

Zap: A♣

Tabela 9: Cenário 6.3.1 (Jogador X dá as cartas, jogador Y é o mão)

Primeira rodada		**Segunda rodada**		**Terceira rodada**		**Vencedor**
Jogador Y	**Jogador X**					
A♥	A♣	**JX:** A♠	**JY:** 3♦	-	-	**JX**
A♥	A♣	**JX:** 4♥	**JY:** 3♦	**JY:** A♦	**JX:** A♠	**JX**
A♦	A♠	**JX:** A♣	**JY:** 3♦	-	-	**JX**
A♦	A♠	**JX:** 4♥	**JY:** 3♦	**JY:** A♥	**JX:** A♣	**JX**
3♦	A♠	**JX:** A♣	**JY:** A♦	-	-	**JX**
3♦	A♠	**JX:** 4♥	**JY:** A♦	**JY:** A♥	**JX:** A♣	**JX**

Fonte: Elaborado pela autora

Nesse cenário, 6.3.1, é certo que o jogador X ganhará a rodada e impossível que o jogador Y a ganhe.

Calculemos agora as probabilidades num cenário ao qual chamei 6.3.2, idêntico ao 6.3.1, exceto pelo fato de o mão ser o jogador X.

Cenário 6.3.2

Tabela 10: Cenário 6.3.2 (Jogador Y dá as cartas, jogador X é o mão)

Primeira rodada		Segunda rodada		Terceira rodada		Vencedor
Jogador X	**Jogador Y**					
A♣	3♦	JX: A♠	JY: A♥	JY: A♦	JX: 4♥	JY
A♣	3♦	JX: 4♥	JY: A♦	JY: A♥	JX: A♠	JY
A♠	A♥	JY: A♦	JX: A♣	JX: 4♥	JY: 3♦	JY
A♠	A♥	JY:3♦	JX: A♣	JX: 4♥	JY: A♦	JY
4♥	3♦	JY: A♥	JX: A♣	JX: A♠	JY: A♦	JX
4♥	3♦	JY: A♦	JX: A♠	JX: A♣	JY: A♥	JX

Fonte: Elaborado pela autora

Já para o cenário 6.3.2 descrito, obtivemos 6 resultados possíveis, dentre os quais, em 4 deles o Jogador Y vence a rodada e em 2 deles o jogador X é que vence. Então, a probabilidade do jogador X ganhar a rodada é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}3\overline{3} = 33,\overline{3}\%$, enquanto a probabilidade do jogador Y ganhar a rodada é $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}6\overline{6} = 66,\overline{6}\%$. Novamente, observamos que as probabilidade de X ou Y ganhar diferem dependendo de X ou Y ser o jogador mão: no cenário 6.3.1, quando o jogador Y era mão, era impossível ele ganhar; já no cenário 6.3.2, em que o jogador X é o mão, a probabilidade dele ganhar é $66,\overline{6}\%$.

Nesse cenário, a probabilidade de X vencer é:

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ X\ é\ mão} \quad e \quad \overbrace{\frac{1}{3}}^{Jogador\ X\ vence\ quando\ ele\ é\ mão} \quad ou \quad \overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ Y\ é\ mão} \quad e \quad \overbrace{1}^{Jogador\ X\ vence\ quando\ Y\ é\ mão} \quad =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 =$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade do jogador X vencer, dado o cenário 3, é $\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = 66,\overline{6}\%$.

Enquanto, para o jogador Y, temos:

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ Y\ é\ mão} \quad e \quad \overbrace{\frac{0}{6}}^{Jogador\ Y\ vence\ quando\ ele\ é\ mão} \quad ou \quad \overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ X\ é\ mão} \quad e \quad \overbrace{\frac{4}{6}}^{Jogador\ Y\ vence\ quando\ X\ é\ mão} \quad =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} =$$

$$\frac{0}{12} + \frac{4}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

A probabilidade de Y ganhar é $\frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 33,\overline{3}\%.$

Cenário 6.4.1

Cartas do Jogador X: 2♣, A♠ e 7♥

Cartas do Jogador Y: 3♦, A♥ e A♦

Vira: 5

Manilhas: 6♣, 6♥, 6♠ e 6♦

Zap: 6♣

Tabela 11: Cenário 6.4.1 (Jogador X dá as cartas, jogador Y é o mão)

Primeira rodada		**Segunda rodada**		**Terceira rodada**		**Vencedor**
Jogador Y	**Jogador X**					
3♦	7♥	**JY:** A♥	**JX:** 2♣	**JX:** A♠	**JY:** A♦	**JY**
3♦	7♥	**JY:** A♦	**JX:** 2♣	**JX:** A♠	**JY:** A♥	**JY**
A♥	2♣	**JX:** A♠	**JY:** 3♦	**JY:** A♦	**JX:** 7♥	**JY**
A♥	2♣	**JX:** 7♥	**JY:** A♦	**JY:** 3♦	**JX:** A♠	**JY**
A♦	2♣	**JY:** A♥	**JX:** 7♥	**JY:** 3♦	**JX:** A♠	**JY**
A♦	2♣	**JY:** 3♦	**JX:** 7♥	**JY:** A♥	**JX:** A♠	**JX**

Fonte: Elaborado pela autora

Nesse cenário 6.4.1, a probabilidade que o jogador X ganhe a rodada é $\frac{1}{6} = 16,\overline{6}\%$, enquanto que, a probabilidade do jogador Y ganhar a rodada é $\frac{5}{6} = 83,\overline{3}\%$.

Calculemos as probabilidades para o cenário 6.4.2.

Cenário 6.4.2

Tabela 12: Cenário 6.4.2 (Jogador Y dá as cartas, jogador X é o mão)

Primeira rodada		Segunda rodada		Terceira rodada		Vencedor
Jogador X	**Jogador Y**					
2♣	3♦	JY: A♥	JX: 7♥	-	-	JY
2♣	3♦	JY: A♦	JX: 7♥	-	-	JY
A♠	3♦	JY: A♥	JX: 2♣	JX: 7♥	JY: A♦	JY
A♠	3♦	JY: A♦	JX: 2♣	JX: 7♥	JY: A♥	JY
7♥	A♥	JY: A♦	JX: 2♣	JX: A♠	JY: 3♦	JY
7♥	A♥	JY: 3♦	JX: A♠	-	-	JY
7♥	A♦	JY: 3♦	JX: A♠	-	-	JY
7♥	A♦	JY: A♥	JX: 2♣	JX: A♠	JY: 3♦	JY

Fonte: Elaborado pela autora

Novamente, nos deparamos com um cenário em que é certo que um jogador ganhará, nesse caso, o jogador Y.

Então, para essa distribuição de cartas, a probabilidade do jogador X ganhar é:

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ X\ é\ mão}\quad e \quad\overbrace{0}^{Jogador\ X\ vence\ quando\ ele\ é\ mão}\quad ou\quad \overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ Y\ é\ mão}\quad e\quad \overbrace{\frac{1}{6}}^{Jogador\ X\ vence\ quando\ Y\ é\ mão}\quad =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} =$$

$$\frac{0}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3} = 8,\overline{3}\%.$$

E temos que a probabilidade do jogador Y ganhar, evento complementar ao jogador X ganhar, é:

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = 0{,}91\overline{6} = 91,\overline{6}\%.$$

Cenário 6.5.1

Cartas do Jogador X: 3♣, 3♠ e 4♥

Cartas do Jogador Y: 3♦, 2♥ e 5♦

Vira: 4

Manilhas: 5♣, 5♥, 5♠ e 5♦

Zap: 5♣

Tabela 13: Cenário 6.5.1 (Jogador X dá as cartas, jogador Y é o mão)

Primeira rodada		**Segunda rodada**		**Terceira rodada**		**Vencedor**
Jogador Y	**Jogador X**					
3♦	3♣	JY: 2♥	JX: 3♠	-	-	JX
3♦	3♣	JY: 5♦	JX: 4♥	-	-	JY
3♦	3♠	JY: 2♥	JX: 3♣	-	-	JX
3♦	3♠	JY: 5♦	JX: 4♥	-	-	JY
2♥	3♣	JX: 3♠	JY: 5♦	JY: 3♦	JX: 4♥	JY
2♥	3♣	JX: 4♥	JY: 5♦	JY: 3♦	JX: 3♠	JX
2♥	3♠	JX: 3♣	JY: 5♦	JY: 3♦	JX: 4♥	JY
2♥	3♠	JX: 4♥	JY: 3♦	JY: 5♦	JX: 3♣	JY
5♦	4♥	JY: 3♦	JX: 3♠	-	-	JY
5♦	4♥	JY: 3♦	JX: 3♣	-	-	JY
5♦	4♥	JY: 2♥	JX: 3♠	JX: 3♣	JY: 3♦	JY
5♦	4♥	JY: 2♥	JX: 3♣	JX: 3♠	JY: 3♦	JY

Fonte: Elaborado pela autora

Nesse cenário 6.5.1, a probabilidade que o jogador X ganhe a rodada é $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 25\%$, enquanto que, a probabilidade do jogador Y ganhar a rodada é $\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 75\%$. Calculemos as probabilidades para o cenário 6.5.2.

Cenário 6.5.2

Tabela 14: Cenário 6.5.2 (Jogador Y dá as cartas, jogador X é o mão)

Primeira rodada		**Segunda rodada**		**Terceira rodada**		**Vencedor**
Jogador X	**Jogador Y**					
3♣	5♦	**JY:** 3♦	**JX:** 4♥	-	-	**JY**
3♣	5♦	**JY:** 2♥	**JX:** 3♠	**JX:** 4♥	**JY:** 3♦	**JY**
3♠	5♦	**JY:** 3♦	**JX:** 4♥	-	-	**JY**
3♠	5♦	**JY:** 2♥	**JX:** 3♣	**JX:** 4♥	**JY:** 3♦	**JY**
4♥	2♥	**JY:** 5♦	**JX:** 3♠	-	-	**JY**
4♥	2♥	**JY:** 5♦	**JX:** 3♣	-	-	**JY**
4♥	2♥	**JY:** 3♦	**JX:** 3♠	-	-	**JY**
4♥	2♥	**JY:** 3♦	**JX:** 3♣	-	-	**JY**

Fonte: Elaborado pela autora

Mais uma vez, obtivemos que, para essa distribuição de cartas e, sendo o jogador X o mão, é impossível que este ganhe.

Para o cenário 6.5.2, a probabilidade de X ganhar é:

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ X\ \text{é}\ \text{mão}}\ e\ \overbrace{\frac{0}{8}}^{Jogador\ X\ vence\ quando\ ele\ \text{é}\ \text{mão}}\ ou\ \overbrace{\frac{1}{2}}^{Jogador\ Y\ \text{é}\ \text{mão}}\ e\ \overbrace{\frac{1}{4}}^{Jogador\ X\ vence\ quando\ Y\ \text{é}\ \text{mão}} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=$$

$$\frac{0}{2}+\frac{1}{8}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}=0{,}125=12{,}5\%.$$

E temos que a probabilidade do jogador Y ganhar, evento complementar ao jogador X ganhar, é:

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0{,}875=87{,}5\%.$$

7 ALGUMAS PERGUNTAS COM RESOLUÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA OU PROBABILIDADE NO JOGO DE TRUCO QUE PODERÃO SER USADAS COM ALUNOS DE ENSINO MÉDIO

Diante de tudo o que foi apresentado até o presente momento, agora somos capazes de responder a algumas questões sobre probabilidade no jogo de truco, as quais podem ser aproveitadas por professores do ensino médio para proporem a seus alunos, desde que seja preestabelecido um cenário bem delimitado para tal abordagem.

7.1 Algumas questões propostas

Questão 7.1.1

Quantos são os cenários possíveis para uma mão?

Considerando os cenários possíveis para mãos entre dois jogadores, o que as diferencia são quatro decisões:

D_1: Escolher o jogador que distribuirá as cartas: 2 possibilidades

D_2: Distribuir 3 cartas para o primeiro jogador: $C_{40,3}$

D_3: Distribuir 3 cartas para o segundo jogador: $C_{37,3}$

D_4: Escolher a carta que será virada – 34 possibilidades

Então, temos:

$$\overbrace{2\text{ possibilidades}}^{\text{Jogador mão}}\ e\ \overbrace{C_{40,3}}^{\text{Jogador 1}}\ \text{e}\ \overbrace{C_{37,3}}^{\text{Jogador 2}}\ \text{e}\ \overbrace{34\text{ possibilidades}}^{\text{Vira}} =$$

$$2 \cdot \frac{40!}{3! \cdot 37!} \cdot \frac{37!}{3! \cdot 34!} \cdot 34 =$$

$$2 \cdot \frac{\cancel{40!}^{\cancel{40}^{20} \cdot \cancel{39}^{13} \cdot 38 \cdot \cancel{37!}}}{\cancel{3!}_{\cancel{6}_{\cancel{2}}} \cdot \cancel{37!}} \cdot \frac{\cancel{37!}^{37 \cdot \cancel{36}^{6} \cdot 35 \cdot \cancel{34!}}}{\cancel{3!}_{\cancel{6}} \cdot \cancel{34!}} \cdot 34 =$$

$$2 \cdot 20 \cdot 13 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 6 \cdot 35 \cdot 34 = 5220196800 \text{ cenários}$$

Pelo número tão elevado de cenários possíveis (mais de cinco bilhões), optamos por calcular as probabilidades em apenas alguns deles.

Questão 7.1.2

Qual a probabilidade de um dos jogadores ter o zap em uma determinada rodada?

Neste momento, torna-se relevante lembrar que essa foi a pergunta que motivou esse trabalho.

Ao continuarmos o raciocínio, considerando que as cartas serão distribuídas entre dois jogadores, o primeiro jogador a receber as cartas terá o zap, ou o segundo jogador a receber as cartas terá o zap, os elementos desse evento serão diferenciados pelas seguintes decisões, no caso em que o Jogador 1 terá o zap:

D_1: Escolher uma carta, dentre as 40 possíveis, para ser o vira: 40 possibilidades

D_2: Jogador 1 deve ter o zap: $C_{38,2}$

D_3: Jogador 2 não terá o zap: $C_{36,3}$

No caso do Jogador 2 ter o zap, as decisões serão:

D_1: Escolher uma carta, dentre as 40 possíveis, para ser o vira: 40 possibilidades

D_4: Jogador 1 não terá o zap: $C_{38,3}$

D_5: Jogador 2 terá o zap: $C_{36,2}$

Logo, o número de elementos do evento é:

$$40 \cdot \overbrace{C_{38,2}}^{\text{Jogador 1 com zap}} \cdot \overbrace{C_{36,3}}^{\text{Jogador 2 sem zap}} \text{ ou } 40 \cdot \overbrace{C_{38,3}}^{\text{Jogador 1 sem zap}} \cdot \overbrace{C_{36,2}}^{\text{Jogador 2 com zap}} =$$

$$40 \cdot \frac{38!}{2! \cdot 36!} \cdot \frac{36!}{3! \cdot 33!} + 40 \cdot \frac{38!}{3! \cdot 35!} \cdot \frac{36!}{2! \cdot 34!} =$$

$$40 \cdot \frac{\cancel{38!}^{\cancel{38}^{19} \cdot 37 \cdot \cancel{36!}}}{\cancel{2!} \cdot \cancel{36!}} \cdot \frac{\cancel{36!}^{\cancel{36}^{6} \cdot 35 \cdot 34 \cdot \cancel{33!}}}{\cancel{3!}_{\cancel{6}} \cdot \cancel{33!}} + 40 \cdot \frac{\cancel{38!}^{38 \cdot 37 \cdot \cancel{36}^{6} \cdot \cancel{35!}}}{\cancel{3!}_{\cancel{6}} \cdot \cancel{35!}} \cdot \frac{\cancel{36!}^{\cancel{36}^{18} \cdot 35 \cdot \cancel{34}!}}{\cancel{2!} \cdot \cancel{34!}} =$$

$$40 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 6 \cdot 35 \cdot 34 + 40 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 6 \cdot 18 \cdot 35 =$$

$$200776800 + 212587200 = 413364000$$

Assim, a probabilidade de na distribuição das cartas um dos jogadores ter o zap é: $\frac{413364000}{5220196800} \cong 7{,}92\%$.

Questão 7.1.3

Qual a probabilidade de um dos dois jogadores ter o zap numa mão?

O evento um dos dois jogadores ter o zap numa mão é o mesmo que um dos dois jogadores ter o zap em pelo menos uma das três rodadas. Assim, o evento não admitido (evento complementar) é, nas três rodadas, nenhum dos dois jogadores ter o zap.

Na questão 7.1.2, obtivemos que a probabilidade de um dos dois jogadores ter o zap numa rodada é $\frac{413364000}{5220196800} \cong 7{,}92\%$; então, a probabilidade de nenhum dos dois ter o zap numa rodada é :

$$1 - \frac{413364000}{5220196800} = \frac{4806832800}{5220196800} \cong 92{,}08\%$$

E a probabilidade de ambos não terem o zap em nenhuma das três rodadas é:

$$\frac{4806832800}{5220196800} \cdot \frac{4806832800}{5220196800} \cdot \frac{4806832800}{5220196800} = \left(\frac{4806832800}{5220196800}\right)^3 \cong 78{,}08\%$$

Logo, a probabilidade de um dois jogadores ter o zap numa mão é:

$$1 - \left(\frac{4806832800}{5220196800}\right)^3 \cong 100\% - 78{,}08\% = 21{,}92\%$$

CONSIDERAÇÕES

Diante dos cenários expostos no estudo, dos cálculos de probabilidade feitos e também baseados em Grando (2004), temos, por hipótese, que, os alunos estarão curiosos para saber sobre as probabilidades do jogador X ou Y ganhar em outros cenários que não sejam os mesmos aqui apresentados.

Nesse trabalho, não experimentamos o ensino de probabilidade no contexto do jogo de truco, todavia, caso o fizéssemos, esperaríamos resultados semelhantes aos obtidos por *Gomes et. al* (2014) quando ensinaram análise combinatória através do jogo de truco e, em seguida, aplicaram um questionário de "satisfação" aos alunos e obtiveram resultados muito positivos.

Conforme precedentes apresentados acima, o que nos motivou a propor o ensino de probabilidade no contexto do jogo de truco foi uma pergunta feita por um aluno que joga truco, destarte acreditamos que outros alunos com esse perfil serão facilmente encontrados em turmas de ensino médio. Em caso positivo, sugerimos aos professores que, após apresentarem o cenário, e antes de se iniciar o cálculo das probabilidades, questione os alunos, com o objetivo de verificar suas opiniões acerca de um possível jogador que teria maior probabilidade de vencer.

Para cada um dos cenários dados, perguntamos a um "truqueiro" que não tinha acesso aos cálculos de probabilidade qual era, na opinião dele, o jogador com maior probabilidade de vencer e, em todos os cenários, esse foi certeiro à resposta, indicando corretamente o jogador com maior probabilidade de vencer.

Mediante ao exposto, acreditamos que nosso trabalho atingiu seu objetivo, pois, uma vez aplicado, mostrará aos alunos que os resultados probabilísticos concordam com suas expectativas e experiências para os que as têm, e que um jogador de truco com conhecimento de probabilidade pode tomar decisões que favoreçam sua vitória no jogo.

REFERÊNCIAS

AGNOLETTO, Giovanni Celso. **Truco: como jogar, causos e dicas: Truco**. São Paulo: Letras Jurídicas, 2006.

BATANERO, Carmen et al. **Combinatorial Reasoning and its Assessment**. 14f. Artigo científico – University of Granada, Granada, 1997.

BERNSTEIN, Peter L. **Desafio aos deuses: a fascinantes história do risco**. Rio de Janeiro: Campus, 1997.

BORBA, R.; BRAZ, F. **O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais?** 3 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT. Fortaleza, 2012.

BORBA, R. **Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização**. 11 Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. Curitiba, 2013.

GOMES, Ana Carla F. N. et al. **O ensino da análise combinatória e o jogo de truco: uma articulação possível**. 9f. Artigo científico – Instituto Federal Farroupilha, Alegrete, 2014.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar**. São Paulo: Atual, 1977.

LIMA, Ana Paula Barbosa de; BORBA, Rute Elisabete de Souza Rosa. **Reconhecendo o princípio fundamental da contagem como estratégia na resolução de problemas combinatórios.** 21f. Artigo científico. Revista Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: v. 17, n.4, pp. 694-714, 2015.

MAISTROV, L.E. **Probability theory – A historical sketch**. Nova Iorque: Academic Press, 1973.

MORGADO, A. C.; CARVALHO. P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORGADO, A.; CARVALHO, J.; CARVALHO, P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Coleção do professor de Matemática. Sociedade Brasileira Matemática - SBM, 9 ed. Rio de Janeiro, 1991.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2015

PESSOA, C.; BORBA, R. **A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. 4 Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Brasília, 2009.

POLESI, **A matemática do poker**. Trabalho de conclusão de curso – Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2017.

SPIEGEL, M.R.; STEPHENS, L.J. **Estatística**. São Paulo: ARTMED, 2009.

THEBAS, Thaciara da Silva; Maia, Ismael José; Alves, Laurindo Miranda. **O pôquer e suas probabilidades**. 11f. Artigo científico - Centro Universitário de Belo Horizonte, Belo Horizonte, 2015.

TORRES, Thiago Henrique Santos. **Contribuição dos jogos na contribuição de conceitos matemáticos**. 92f. Dissertação de mestrado – Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

TORREZAN, Cristiano. 2013. **Fundamentos do Pôquer**. Disponível em: <http://www.unicamp.br/unicamp/clipping/2013/08/21/unicamp-adotao-poquer-como-disciplina-para-ensinar-negocios?language=pt-br> Acesso em: 23 nov. 2017.

VIALI, Lorí. **Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade**. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 8, n. 16, p. 143-153, Pontífica Universidade Católica – RS e Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2008.

VICENTE, R. **Noções de Estatística I**, 49f, EACH - USP, São Paulo, 2009.

Truco. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Truco>. Acesso em: 12/11/2018.

Truco paulista. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Truco_paulista>. Acesso em: 18/09/2018.

Truco paulista. Disponível em: <http://www.truco.net.br/>. Acesso em: 09/10/2018.